

УДК 517.9

## ЗАДАЧІ АПРІОРНОГО СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

\* І. Г. Баланенко, \*\* П. І. Когут

\* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: balanenko-ig@rambler.ru*

\*\* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Досліджується один клас задач оптимального керування для виродженого параболічного рівняння з крайовими умовами Діріхле на межі області та з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку. Показано, що для таких задач існують оптимальні розв'язки у вагових просторах Соболева за умови компактності операторів, які формують обернений зв'язок.

**Ключові слова:** оптимальне керування, нерівність Харді – Пуанкаре, параболічне рівняння, апріорний синтез.

### 1. Вступ

Основним об'єктом досліджень виступає задача оптимального керування виродженим параболічним рівнянням

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) = f(t, x) + p(t, x)$$

з крайовими умовами Діріхле на межі області за умови, що є апріорі заданою структура керування у формі оберненого зв'язку

$$p(t, x) = \sum_{j=1}^M u_j(t) \mathcal{M}_j(y),$$

де  $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$  є лінійними неперервними операторами, а функції  $u = [u_1, \dots, u_M]^T \in L^2(0, T)^M$  підлягають визначенню.

Характерною рисою вироджених параболічних рівнянь та пов'язаних із ними початково-крайових задач є та обставина, що проблема їх розв'язаності суттєво залежить від властивостей вагової функції  $\rho$  (див., напр., [3, 7]). Той

факт, що функція  $\rho$  може бути необмеженою на області  $\Omega$  чи досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, означає, що диференціальний оператор  $\operatorname{div}(\rho(x)\nabla)$  втрачає властивість коерцитивності та неперервності на  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . У результаті, наведені задачі можуть успадковувати неєдність слабких розв'язків та інші ефекти, які притаманні некоректним задачам математичної фізики.

Як відомо (див., напр., [1, 2]), базовим у теорії початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь є поняття вагового простору Соболева  $W_0^{1,2}(\Omega; \rho dx)$ . Оскільки простір фінітних функцій  $C_0^\infty(\Omega)$  не є в загальному випадку щільним у  $W_0^{1,2}(\Omega; \rho dx)$ , то ця обставина породжує суттєві труднощі в обґрунтуванні проблеми єдиності слабких розв'язків таких задач та отриманні відповідних апріорних оцінок для них. У зв'язку з цим автори показують, що таке обґрунтування стає можливим, якщо вагову функцію  $\rho = \rho(x)$  наділити певними додатковими властивостями, що не виводять її з класу необмежених та вироджених на  $\Omega$  функцій. Такою умовою є приналежність  $\rho$  до класу функцій потенціального типу. В результаті, залучаючи нерівність типу Харді – Пуанкаре та умови компактності для операторів  $\mathcal{M}_j$ , встановлено, що задача апріорного синтезу оптимального керування для вихідного виродженого параболічного рівняння має єдиний оптимальний розв'язок у вагових просторах Соболева. Для цього розв'язку отримано та обґрунтовано апріорні оцінки.

Окрім цього, в роботі розглянуто геометричне узагальнення задачі оптимального керування з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку, яке полягає в тому, що оператори  $\mathcal{M}_j$  обираються у вигляді

$$\mathcal{M}_j(\phi) = c\sqrt{\rho(x)} \int_{B(b_j, r)} \phi(s)\sqrt{\rho(s)} ds, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx),$$

де центри  $b_j$  "позиціонування" куль  $B(b_j, r)$  вважаються невідомими і підлягають визначенню. Показано, що така задача є розв'язанною за умови, коли приміжовий шар множини  $\Omega$  є недопустимим для вибору точок  $b_j$ .

## 2. Основні позначення та факти

Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) — обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею  $\partial\Omega$ . Нехай  $Q = (0, T) \times \Omega$  є циліндром в  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$ , де  $T < +\infty$ . Через  $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$  позначимо його бокову поверхню. Нехай  $H_0^1(\Omega)$  є простором Соболева, який утворено замиканням множини  $C_0^\infty(\Omega)$  за нормою

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla y(x)|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Нехай є заданою функція  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  така, що:  $\rho(x) > 0$  майже скрізь (м.с.) на  $\Omega$ ,

$$\rho \in L^1(\Omega), \rho^{-1} \in L^1(\Omega), \nabla |\ln \rho| \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \text{і} \quad \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \quad (2.1)$$

Надалі будемо пов'язувати з функцією  $\rho$  такі вагові простори  $L^2(\Omega, \rho dx)$ ,  $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$  та  $W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$ , де через  $W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$  позначено ваговий простір Соболевi, який утворено елементами з  $W_0^{1,1}(\Omega, \rho dx)$ , для яких є скінченною норма

$$\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} := \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx + \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \right)^{1/2}.$$

**Означення 2.1.** Будемо казати, що  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу, якщо

- (i)  $\rho > 0$  майже скрізь (м.с.) на  $\Omega$ ,  $\rho \in L^1(\Omega)$ ,  $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ ;
- (ii) існує підобласть  $\Omega_* \subset \Omega$  така, що  $\text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) \geq \delta > 0$ ,

$$\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*}) \text{ і } \rho(x) \geq \sigma \text{ на } \Omega \setminus \Omega_* \text{ при деякому } \sigma > 0; \quad (2.2)$$

- (iii) існують сталі  $C > 0$ ,  $\lambda < \lambda_* := (N-2)^2/4$  та система внутрішніх точок  $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_K^*\}$  множини  $\Omega$  такі, що

$$-C \leq V(x) \leq \frac{2\lambda}{K} \left( \sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|_{\mathbb{R}^N}^2} \right), \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.3)$$

де позначено  $V(x) = -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho(x)|_{\mathbb{R}^N}^2$ .

### 3. Постановка задачі оптимального керування

Нехай  $y_{ad} \in L^2(Q)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ , та  $y_0 \in L^2(\Omega)$  — задані функції. Нехай  $M \in \mathbb{N}$  та  $\nu \neq 0$  — фіксовані сталі. Нехай  $U_{\partial}$  — непорожня опукла замкнена підмножина в  $L^2(0, T)^M$ .

Розглянемо в циліндрі  $Q = (0, T) \times \Omega$  наступну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння з апіорі заданою структурою закону оберненого зв'язку:

$$I(u, y) = \int_0^T \left\| y(t, \cdot) - \frac{y_{ad}(t, \cdot)}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}^2 dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2 dt \rightarrow \inf, \quad (3.1)$$

$$\rho(x) \dot{y} - \nu \operatorname{div}(\rho(x) \nabla y) = f(t, x) + p(t, x) \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (3.2)$$

$$y(t, x) = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Sigma, \quad (3.3)$$

$$\sqrt{\rho(x)} y(0, x) = y_0 \quad \text{майже скрізь на } \Omega, \quad (3.4)$$

$$p(t, x) = \sum_{j=1}^M u_j(t) \mathcal{M}_j(y), \quad u = [u_1, \dots, u_M]^T \in U_{\partial}. \quad (3.5)$$

Тут  $N_j > 0$  — задані сталі,  $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$  — лінійні неперервні оператори такі, що

$$\left| \langle \mathcal{M}_j(y), y \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \right| \leq C \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \|y\|_{L^2(\Omega, \rho dx)} \quad (3.6)$$

для всіх  $j = 1, \dots, M$  з сталою  $C > 0$ , яка не залежить від  $y$  та  $j$ .

Для початку розглянемо задачу оптимального керування (3.1)–(3.5), яка полягає у визначенні функцій  $(u_1^0, \dots, u_M^0, y^0) \in L^2(0, T)^M \times L^2(0, T; \mathcal{W}_\rho)$  (надалі їх будемо називати оптимальними), що в слабкому сенсі задовольняють співвідношення (3.2)–(3.5) і на яких функціонал (3.1) досягає свого найменшого можливого значення.

Пов'яжемо з початково-крайовою задачею (3.2)–(3.4) лінійний оператор  $A : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$ , залучивши правило:

$$\langle Ay, v \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} = \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx).$$

Ясно, що  $Ay = -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y)$ , а отже, в силу вихідних припущень, оператор  $A : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$  не задовольняє умові коерцитивності. Дійсно, оскільки

$$\langle A(y), y \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} = \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \neq \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}^2,$$

то не має жодних підстав стверджувати виконання наступної умови

$$\frac{\langle A(y), y - v_0 \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}}{\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}} \rightarrow +\infty \text{ при } \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \rightarrow \infty.$$

В результаті проблема існування та єдиності розв'язків початково-крайової задачі (3.1)–(3.5) на класі допустимих керувань залишається відкритим питанням.

Таким чином, характерною рисою задачі оптимального керування (3.1)–(3.5) є те, що за певного вибору функції  $\rho$  з властивостями (2.1) відповідна множина допустимих розв'язків задачі (3.1)–(3.5) може виявитися порожньою.

#### 4. Попередній аналіз задачі оптимального керування (3.1)–(3.5)

**Твердження 4.1.** Для довільного елемента  $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$  має місце подання  $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$ , де  $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

*Доведення.* Зафіксуємо довільний елемент  $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$  і покажемо, що  $z = y\sqrt{\rho} \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Дійсно, маємо

$$\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |y\sqrt{\rho}|^2 dx = \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right) \leq C \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}^2.$$

Далі, залучаючи пертворення,

$$\nabla(\sqrt{\rho}y) = y\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho + \sqrt{\rho}\nabla y = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{1}{2}y\nabla\rho\right) = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right),$$

та властивості вагової функції  $\rho(x)$ , отримаємо

$$\begin{aligned}\|\nabla z\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} &= \int_{\Omega} \left| \sqrt{\rho} \left( \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right) \right|_{\mathbb{R}^N} dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\sqrt{\rho}\nabla y|_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\sqrt{\rho}y\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N} dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \rho |\nabla y|_{\mathbb{R}^N} dx \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} y^2 \rho dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_1 \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}.\end{aligned}$$

Таким чином,  $z \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Окрім того, елемент  $z = y\sqrt{\rho}$ , успадковує властивості сліду вздовж межі області  $\partial\Omega$  від елементу  $y$ , і нарешті, отримаємо  $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Твердження доведене.  $\square$

Насправді, відображення  $\varphi : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , що визначається як  $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$ , не є сюр'єктивним. Проте у просторі  $W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  множина його образів  $\varphi(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))$  є щільною. Легко бачити, що для довільного  $z \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , маємо  $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$ . Дійсно,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}^2 &= \int_{\Omega} z^2 \rho dx + \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}} \nabla \rho \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \\ &\leq \|z^2\|_{C(\Omega)} \int_{\Omega} \rho dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla z|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} z^2 |\ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 dx \\ &\leq \|z^2\|_{C(\Omega)} \|\rho\|_{L^1(\Omega)} + 2 \|\nabla z\|_{\mathbb{R}^N}^2 \|C(\Omega)\| + \frac{1}{2} \|z^2\|_{C(\Omega)} \|\nabla \ln \rho\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)}^2 < \infty.\end{aligned}$$

Таким чином, як очевидний наслідок попереднього результату та неперервності вкладення  $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ , отримаємо наступний результат.

**Наслідок 4.1.** *Існує щільна множина  $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$ , така що*

$$\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx), \quad \forall z \in D_\rho.$$

Приймаючи до уваги дане твердження, введемо до розгляду наступне лінійне відображення

$$\mathfrak{F} : D_\rho \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx), \quad \text{де } \mathfrak{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}.$$

Оскільки область визначення  $D_\rho$  даного відображення є щільною множиною банахового простору  $H_0^1(\Omega)$ , то для  $\mathfrak{F}$ , як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор  $\mathfrak{F}^* : D(\mathfrak{F}^*) \subset W^{-1,2}(\Omega, \rho^{-1} dx) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  такий, що

$$\langle \mathfrak{F}^* v, z \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} = \langle v, \mathfrak{F} z \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}, \quad \forall z \in D_\rho \text{ і } \forall v \in D(\mathfrak{F}^*),$$

де

$$D(\mathfrak{F}^*) = \left\{ v \in W^{-1,2}(\Omega, \rho^{-1} dx) \mid \begin{array}{l} \exists C > 0 \text{ such that for all } z \in D_\rho \\ \left| \langle v, \mathfrak{F} z \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \right| \leq C \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array} \right\}.$$

Проте, в загальному випадку, оператор  $\mathfrak{F}^*$  не є щільно визначеним. Наступне твердження встановлює важливу властивість оператора  $A$ .

**Теорема 4.1.** *Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  є ваговою функцією потенціального типу. Тоді*

$$\langle A(\mathfrak{F}z), \mathfrak{F}v \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} = \langle B(z), v \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)}, \quad (4.1)$$

де

$$B(z) = -\Delta z - \frac{1}{2} V(x) z, \quad (4.2)$$

$$V(x) = -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2, \quad (4.3)$$

і лінійний оператор  $B$  визначає ізоморфізм простору  $H_0^1(\Omega)$  в його дуальний простір  $H^{-1}(\Omega)$ .

*Доведення.* Нехай  $v$  та  $z$  — довільні елементи з  $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$ . Тоді, за наслідком 4.1, маємо  $\mathfrak{F}z, \mathfrak{F}v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$ . Далі, згідно означення оператора  $\mathfrak{F}$ , можна отримати наступну низку перетворень

$$\begin{aligned} A(\mathfrak{F}z) &= -\operatorname{div}(\rho A_\theta \nabla(\mathfrak{F}z)) = -\operatorname{div}\left(\rho \nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right) \\ &= -\rho^{1/2} \Delta z + \frac{1}{2} \rho^{-3/2} \left(\rho \Delta \rho - \frac{1}{2} |\nabla \rho|_{\mathbb{R}^N}^2\right) z \\ &= -\sqrt{\rho} \Delta z - \frac{1}{2} \sqrt{\rho} z \left(-\frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{|\nabla \rho|_{\mathbb{R}^N}^2}{\rho^2}\right) \\ &= \sqrt{\rho} \left(-\Delta z - \frac{1}{2} z V(x)\right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla \rho|_{\mathbb{R}^N}^2}{\rho^2} &= |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2, \\ \Delta \ln \rho &= \operatorname{div}(\nabla \ln \rho) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \rho}{\rho}\right) = \frac{\Delta \rho \cdot \rho - (\nabla \rho, \nabla \rho)_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} \\ &= \frac{\Delta \rho \cdot \rho}{\rho^2} - \frac{|\nabla \rho|_{\mathbb{R}^N}^2}{\rho^2} = \frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{|\nabla \rho|_{\mathbb{R}^N}^2}{\rho^2}, \end{aligned}$$

то функцію  $V(x)$  можна подати у вигляді:

$$V(x) = -\Delta \ln \rho - \frac{1}{2} \frac{|\nabla \rho|_{\mathbb{R}^N}^2}{\rho^2} = -\Delta \ln \rho - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2. \quad (4.4)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} & \langle A(\mathfrak{F}z), \mathfrak{F}v \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \left\langle -\operatorname{div} \left( \rho \nabla \left( \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) \right), \frac{v}{\sqrt{\rho}} \right\rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \left\langle \rho^{1/2} \left( -\operatorname{div}(\nabla z) - \frac{1}{2} V(x) z \right), \frac{v}{\sqrt{\rho}} \right\rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \left\langle -\Delta z - \frac{1}{2} V(x) z, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} = \langle B(z), v \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Насамкінець, оскільки  $\rho$  є функцією потенціального типу, то з (2.3) та нерівності Харді – Пуанкаре (див. [2, 3])

$$\int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \frac{\lambda_*}{K} \left( \sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|_{\mathbb{R}^N}^2} \right) y^2 \right] dx \geq C(\Omega) \int_{\Omega} y^2 dx, \quad (4.5)$$

впливає, що норми  $(\int_{\Omega} [|\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \frac{1}{2} V(x) y^2] dx)^{1/2}$  та  $(\int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx)^{1/2}$  є еквівалентними в просторі  $H_0^1(\Omega)$ , а це означає, що оператор  $B$  визначає ізоморфізм між  $H_0^1(\Omega)$  та  $H^{-1}(\Omega)$ .  $\square$

Приймаючи до уваги даний результат, перейдемо у початково-крайовій задачі (3.2)–(3.4) до її еквівалентного опису. Маємо такий результат:

**Твердження 4.2.**  $y \in L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))$  є розв'язком задачі (3.2)–(3.4) тоді і тільки тоді, коли  $y(t) = \frac{z(t)}{\sqrt{\rho}}$ , де  $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dot{z}(t) w dx + \nu \int_{\Omega} (\nabla z(t), \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dx - \nu \int_{\Omega} \frac{1}{2} V(x) z(t) w dx \\ &= \sum_{j=1}^M u_j(t) \int_{\Omega} \widehat{\mathcal{M}}_j(z(t)) w dx + \int_{\Omega} \frac{f(t)}{\sqrt{\rho}} w dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \text{ м.с. } (0, T) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (z(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} = (y_0, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.7)$$

Тут  $\widehat{\mathcal{M}}_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  є лінійними операторами такими, що  $\widehat{\mathcal{M}}_j(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z)$  для всіх  $j = 1, \dots, M$ , і при цьому існує стала величина  $C > 0$ , яка забезпечує виконання наступних оцінок при всіх  $z \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \langle \widehat{\mathcal{M}}_j(z), z \rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} \right| \leq C \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j = \overline{1, M}. \quad (4.8)$$

*Доведення.* Приймаючи до уваги теорему 4.1 та залучаючи необхідні міркування з [2, 3], досить зауважити, що для довільного  $v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$  існує елемент  $w \in H_0^1(\Omega)$ , такий що  $v = \mathfrak{F}w := \frac{w}{\sqrt{\rho}}$ . Отже, мають місце наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v \rho dx &= \int_{\Omega} f \frac{w}{\sqrt{\rho}} dx = \int_{\Omega} \frac{f}{\sqrt{\rho}} w dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dx &= \langle \operatorname{div}(\rho(x) \nabla y), v \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \langle \operatorname{div}(\rho(x) \nabla(\mathfrak{F}z)), \mathfrak{F}w \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \left\langle \operatorname{div} \left( \rho(x) \nabla \left( \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right) \right), \frac{w}{\sqrt{\rho}} \right\rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \left\langle \sqrt{\rho} \left( -\Delta z - \frac{1}{2} z V(x) \right), \frac{w}{\sqrt{\rho}} \right\rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} \\ &= \left\langle -\Delta z - \frac{1}{2} V(x) z, w \right\rangle_{H^{-1}(\Omega); H_0^1(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{2} V(x) z w dx, \\ \int_{\Omega} \mathcal{M}_j(v) w dx &= \int_{\Omega} \mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z) \mathfrak{F}w dx = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z) w dx, \quad \forall j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Що торкається оцінок (4.8), то вони є прямим наслідком (3.6), твердження 4.1 та означення вагових просторів  $W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)$  і  $L^2(\Omega, \rho dx)$ .  $\square$

Беручи до уваги отримані результати, введемо до розгляду наступну задачу оптимального керування:

$$J(u, w) = \int_0^T \|z - y_{ad}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2 dt \longrightarrow \inf, \quad (4.9)$$

за обмежень

$$\dot{z} - \nu \Delta z - \frac{\nu}{2} V(x) z = f \rho^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{j=1}^M u_j(t) \widehat{\mathcal{M}}_j(z) \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (4.10)$$

$$z(t, x) = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Sigma, \quad (4.11)$$

$$z(0, x) = y_0 \quad \text{майже скрізь на } \Omega, \quad (4.12)$$

$$u = [u_1, \dots, u_M]^T \in U_{\partial}. \quad (4.13)$$

Як буде показано далі, задачі оптимального керування (3.1)–(3.4) та (4.9)–(4.13) є в певному сенсі еквівалентними. Дійсно, має місце такий результат.

**Теорема 4.2.** *Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу. Нехай  $y_{ad} \in L^2(Q)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ , та  $y_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими*



функціями, і нехай лінійні оператори  $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$  підкоряються оцінкам (3.6). Тоді допустима пара  $(u^0, z^0)$  є оптимальною в задачі (4.9)–(4.13) в тому і тільки в тому разі, коли

$$(u^0, y^0) = (u^0, \mathfrak{F}z^0) := \left( u^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (4.14)$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (3.1)–(3.4). При цьому має місце рівність

$$\inf J(u, z) = J(u^0, z^0) = I(u^0, y^0) = \inf I(u, y). \quad (4.15)$$

*Доведення.* Справедливість даного результату легко встановити у спосіб, повністю ідентичний доведенню теореми 3.3 з [2]. При цьому потенціальність вагової функції  $\rho$ , а отже справедливість нерівності типу Харді – Пуанкаре, та оцінки (4.8) гарантують (деталі див. у [6, с.52]), що для довільних  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$  та  $u \in U_\partial$  існує єдиний розв'язок  $z$  початково-крайової задачі (4.10)–(4.12) такий, що

$$z \in W(0, T) := \{w : w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \dot{w} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

□

## 5. Теорема існування оптимального керування з апіорі заданою структурою оберненого зв'язку

Доведемо розв'язність вихідної задачі оптимального керування (3.1)–(3.4).

**Теорема 5.1.** *Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу. Нехай  $y_{ad} \in L^2(Q)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ , та  $y_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими функціями, і нехай лінійні неперервні оператори  $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$  підкоряються оцінкам (3.6) та їх образи  $\widehat{\mathcal{M}}_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  є компактними з простору  $W(0, T)$  в  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Тоді задача оптимального керування (3.1)–(3.4) має єдиний розв'язок  $(u^0, y^0)$  у просторі  $L^2(\Omega)^M \times L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))$ .*

*Доведення.* За теоремою 4.2 задачі (4.9)–(4.13) та (3.1)–(3.4) є еквівалентними. Отже, для однозначної розв'язності задачі (3.1)–(3.4) достатньо показати, що задача (4.9)–(4.13) має єдиний розв'язок.

Нехай  $\{(u^k, z^k)\}_{k=1}^\infty$  – довільна мінімізаційна послідовність для задачі (4.9)–(4.13), тобто  $z^k := z(u^k)$  є відповідними розв'язками задачі (4.10)–(4.12) і при цьому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_0^T \|z^k - y_{ad}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j^k(t)|^2 dt \right] = \inf J(u, z) \geq 0. \quad (5.1)$$

Отже, можемо вважати, що  $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є слабко збіжною послідовністю. Нехай  $u^* \in L^2(0, T)^M$  — її слабка границя. Оскільки  $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset U_\partial$ , то, в силу зроблених припущень щодо множини  $U_\partial$  та за теоремою Мазура, отримуємо:  $u^* \in U_\partial$ . Покажемо, що відповідна послідовність розв'язків  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в просторі  $W(0, T)$ . Дійсно, для цього перепишемо співвідношення (4.10)–(4.12) у варіаційній формі

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dz^k(t)}{dt}, \phi \right)_{L^2(\Omega)} + \nu \left( \nabla z^k(t), \nabla \phi \right)_{L^2(\Omega)^N} - \frac{\nu}{2} \left( \phi, Vz^k(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\ & = \left( \frac{f}{\sqrt{\rho}}, \phi \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^M u_j^k(t) \left( \widehat{\mathcal{M}}_j(z^k), \phi \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Залучаючи нерівність (4.5) та властивість потенціальності функції ваги  $\rho$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \frac{1}{2} V(x) y^2 \right] dx \stackrel{(2.3)}{\geq} \int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \frac{\lambda}{K} \left( \sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|_{\mathbb{R}^N}^2} \right) y^2 \right] dx \\ & = \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_*} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \\ & + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_{\Omega} \left[ |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 - \frac{\lambda_*}{K} \left( \sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|_{\mathbb{R}^N}^2} \right) y^2 \right] dx \\ & \stackrel{(4.5)}{\geq} \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_*} \right) \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 dx + \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*} \int_{\Omega} y^2 dx. \end{aligned}$$

Покладемо тепер в (5.2)  $\phi = z^k(t)$  і скористаємося попередньої нерівністю. Маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|z^k(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_2 \|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \sum_{j=1}^M |u_j^k(t)| \|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)} \|z^k(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(t) \rho^{-1/2}\|_{H^{-1}(\Omega)} \|z^k(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leq \frac{C_1}{2} \|z^k(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_3 \sum_{j=1}^M |u_j^k(t)|^2 \|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_4 \|f(t) \rho^{-1/2}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Оскільки  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$  для довільних  $\varepsilon > 0$ , то

$$\begin{aligned} & \|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_5 \int_0^t \|z^k(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C_6 \int_0^t \left( 1 + |u^k(s)|_{\mathbb{R}^M}^2 \right) \|z^k(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + C_6 \int_0^t \|f(s) \rho^{-1/2}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds + |y_0|^2. \end{aligned}$$

В результаті, залучаючи інтегральну нерівність Гронуолла – Беллмана, приходимо до наступних апіорних оцінок

$$\|z^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \widehat{C} := \left[ |y_0|^2 + C_6 \int_0^T \|f(s) \rho^{-1/2}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right] \times \exp \left( C_6 \left[ \int_0^T (1 + |u^k(s)|_{\mathbb{R}^M}^2) ds \right] \right), \quad (5.3)$$

$$\int_0^T \|z^k(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \widehat{C} C_6^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Таким чином, послідовність  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою, а отже, і слабо компактною в просторі  $W(0, T)$ . Тому, з точністю до підпослідовності, можемо вважати, що існує елемент  $z^* \in W(0, T)$  такий, що  $z^k \rightharpoonup z^*$  слабо в  $W(0, T)$ . Приймаючи до уваги властивість компактності операторів  $\widehat{\mathcal{M}}_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , отримуємо:

$$\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*) \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall j = \overline{1, M}. \quad (5.5)$$

Об'єднуючи цей факт з властивістю слабкої збіжності керувань  $u^k \rightharpoonup u^*$  в просторі  $L^2(0, T)^M$ , приходимо до висновку:

$$u_j^k(t) \widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) \rightharpoonup u_j^*(t) \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*) \quad \text{слабо в } L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall j = \overline{1, M}. \quad (5.6)$$

Переходячи тепер до границі в інтегральній тотожності (5.2) з урахуванням властивостей (5.5)–(5.6), легко бачити, що пара  $(u^*, z^*)$  є допустимою для задачі (4.9)–(4.13). Що стосується оптимальності цієї пари та її єдиності, то дана обставина є прямим наслідком співвідношення (5.1), строгої опуклості функціонала  $J$  та його напівнеперервності знизу відносно збіжностей (5.5)–(5.6). Таким чином, за теоремою 4.2, пара  $(u^*, y^*) := \left( u^*, \frac{z^*}{\sqrt{\rho}} \right)$  є єдиним оптимальним розв'язком для задачі (3.1)–(3.4), що і потрібно було встановити.  $\square$

Беручи до уваги умови теореми 5.1, доречно навести приклади операторів  $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow \left( W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \right)^*$ , які таким умовам підкоряються.

Нехай  $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$  є заданою сукупністю відкритих підмножин множини  $\Omega$  з ненульовою лебеговою мірою. Покладемо

$$\mathcal{M}_j(\phi) = \frac{\sqrt{\rho(x)}}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} \phi(s) \sqrt{\rho}(s) ds, \quad \forall j = 1, \dots, M. \quad (5.7)$$

Покажемо для початку, що  $\mathcal{M}_j : W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \rightarrow \left( W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \right)^*$ . Дійсно, оскільки дуальний простір  $\left( W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx) \right)^*$  можна утотожнити з простором

$W^{-1,2}(\Omega, \rho^{-1} dx)$ , то типовим представником простору  $(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*$  є такий функціонал

$$\begin{aligned} \langle F, y \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*, W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)} &= \int_{\Omega} f_0 y dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i D_i y dx \leq \\ &\leq \left( \int_{\Omega} f_0^2 \rho^{-1} dx \right)^{1/2} \|y\|_{L^2(\Omega, \rho dx)} + \sum_{i=1}^N \left( \int_{\Omega} f_i^2 \rho^{-1} dx \right)^{1/2} \|D_i y\|_{L^2(\Omega, \rho dx)} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^N \left( \int_{\Omega} f_i^2 \rho^{-1} dx \right)^{1/2} \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}, \end{aligned}$$

Отже, виходячи з (5.7), маємо:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_j(\phi)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^*}^2 &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{\sqrt{\rho(x)}}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} \phi(s) \sqrt{\rho(s)} ds \right)^2 \frac{1}{\rho} dx \\ &\leq \frac{1}{|\Omega_j|^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega_j} \phi^2(s) \rho(s) ds \int_{\Omega_j} ds dx \\ &\leq \frac{|\Omega|}{|\Omega_j|} \|\phi\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}^2 \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega_j|} \|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)}^2, \end{aligned}$$

що означає  $\mathcal{M}_j \in \mathcal{L} \left( W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx), (W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))^* \right)$  при всіх  $j = 1, \dots, M$ .

Тепер покажемо, що оператори  $\widehat{\mathcal{M}}_j : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  є компактними з простору  $W(0, T)$  в  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Дійсно, за побудовою маємо (див. твердження 4.2)

$$\widehat{\mathcal{M}}_j(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{M}_j(\mathfrak{F}z) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} z(s) ds, \quad \forall j = 1, \dots, M, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

Отже, якщо послідовність  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  збігається слабко в  $W(0, T)$  до деякого елемента  $z^* \in W(0, T)$ , то за теоремою про компактне вкладення простору  $W(0, T)$  в  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  (див. [4]), отримуємо:

$$z^k \rightarrow z^* \text{ сильно в } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Таким чином, має місце наступна збіжність числової послідовності

$$\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) := \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} z^k(s) ds \longrightarrow \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} z^*(s) ds = \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*),$$

що означає:

$$\widehat{\mathcal{M}}_j(z^k) \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_j(z^*) \text{ сильно в } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Тим самим властивість компактності встановлена.

## 6. Геометричне узагальнення задачі оптимального керування з апріорі заданою структурою оберненого зв'язку

Нехай всюди далі в цьому параграфі  $E$  є замкненою непорожньою вимірною підмножиною множини  $\Omega$  такою, що  $\text{dist}(E, \partial\Omega) \geq r > 0$ . З довільною точкою  $b \in E$  далі будемо пов'язувати відкриту кулю  $B(b, r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - b| < r\}$ . Нехай  $c^{-1} = |B(b, r)|$  є лебеговою мірою такої кулі. Введемо до розгляду наступну сукупність лінійних операторів

$$\mathcal{M}_j(\phi) = c\sqrt{\rho(x)} \int_{B(b_j, r)} \phi(s)\sqrt{\rho(s)} ds, \quad \forall j = 1, \dots, M, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx), \quad (6.1)$$

де  $\{b_1, \dots, b_M\}$  є деякою системою точок в  $E$ . Як легко бачити (див. попередній параграф)

$$\mathcal{M}_j \in \mathcal{L}\left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx), \left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)\right)^*\right), \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

Розглянемо тепер наступне узагальнення задачі оптимального керування (3.1)–(3.4), суттєва відмінність якого від постановки (3.1)–(3.4) полягає в тому, що "позиціонування"  $b_j \in E$  апріорно заданого закону оберненого зв'язку у формі (3.5) є невідомим і підлягає визначенню:

$$I(u, b, y) = \int_0^T \left\| y(t, \cdot) - \frac{y_{ad}(t, \cdot)}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}^2 dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2 dt \longrightarrow \inf, \quad (6.2)$$

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div}(\rho(x)\nabla y) = f(t, x) + p(t, x) \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (6.3)$$

$$y(t, x) = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Sigma, \quad (6.4)$$

$$\sqrt{\rho(x)}y(0, x) = y_0 \quad \text{майже скрізь на } \Omega, \quad (6.5)$$

$$p(t, x) = \sum_{j=1}^M u_j(t)\mathcal{M}_j(y) = c\sqrt{\rho(x)} \sum_{j=1}^M u_j(t) \int_{B(b_j, r)} y(t, s)\sqrt{\rho(s)} ds, \quad (6.6)$$

$$u = [u_1, \dots, u_M]^T \in U_\partial, \quad b = [b_1, \dots, b_M]^T \in E^M. \quad (6.7)$$

Тут  $N_j > 0$  — задані сталі,  $U_\partial$  — непорожня опукла замкнена підмножина в  $L^2(0, T)^M$ .

У повній аналогії до теореми 4.2 можна показати, що задача (6.2)–(6.7) є еквівалентною (в сенсі бієкції  $(u, b, z) \mapsto (u, b, \mathfrak{F}z)$ ) наступній задачі опти-

мального керування

$$J(u, b, z) = \int_0^T \|z - y_{ad}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j(t)|^2 dt \longrightarrow \inf, \quad (6.8)$$

$$\dot{z} - \nu \Delta z - \frac{\nu}{2} V(x)z = f\rho^{-\frac{1}{2}}(x) + q(t, x) \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (6.9)$$

$$z(t, x) = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \Sigma, \quad (6.10)$$

$$z(0, x) = y_0 \quad \text{майже скрізь на } \Omega, \quad (6.11)$$

$$q(t, x) = c \sum_{j=1}^M u_j(t) \int_{B(b_j, r)} z(t, s) ds, \quad (6.12)$$

$$u = [u_1, \dots, u_M]^T \in U_\partial, \quad b = [b_1, \dots, b_M]^T \in E^M. \quad (6.13)$$

Для доведення розв'язності задачі (6.8)–(6.13) скористаємося відомими результатами теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами (див., напр., [5, 6]).

**Теорема 6.1.** *Нехай  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  є ваговою функцією потенціального типу. Нехай  $y_{ad} \in L^2(Q)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1} dx))$ , та  $y_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими функціями. Нехай  $E$  є замкненою непорожньою вимірною підмножиною множини  $\Omega$  такою, що  $\text{dist}(E, \partial\Omega) \geq r > 0$ . Тоді задача оптимального керування (6.2)–(6.7) є розв'язною, тобто існує принаймні один набір функцій  $(u^0, b^0, y^0)$  у просторі  $L^2(\Omega)^M \times E^M \times L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx))$  такий, що  $u^0 \in U_\partial$ ,  $b^0 \in E^M$ ,  $y^0 = y(u^0, b^0)$  і при цьому*

$$J(u^0, b^0, y^0) \leq J(u, b, y), \quad \text{для всіх допустимих наборів } (u, b, y).$$

*Доведення.* Нехай  $\{(u^k, b^k, z^k)\}_{k=1}^\infty$  — довільна мінімізаційна послідовність для задачі (6.8)–(6.13). Отже  $u^k \in U_\partial$ ,  $b^k \in E^M$ ,  $z^k = z(u^k, b^k)$  є відповідними розв'язками задачі (6.9)–(6.11) і при цьому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_0^T \|z^k - y_{ad}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \sum_{j=1}^M N_j \int_0^T |u_j^k(t)|^2 dt \right] = \inf J(u, b, z) \geq 0. \quad (6.14)$$

Оскільки множина  $E$  є обмеженою та замкненою, то знайдеться вектор  $b^* = [b_1^*, \dots, b_M^*] \in E^M$  такий, що з точністю до підпослідовності маємо:

$$b^k \rightarrow b^* \quad \text{в } \mathbb{R}^{MN} \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (6.15)$$

Зважаючи на те, що величина  $c$  в (6.12) ( $c^{-1}$  є лебеговою мірою множин  $B(b_j^k, r) \cap \Omega$ ) не залежить від вибору центрів  $b_j^k \in E$ , можемо скористатися аргументи з доведення теореми 5.1 та отриманими там апіорними оцінками щодо компактності послідовностей  $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset U_\partial$  та  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W(0, T)$ . Отже, існують елементи  $u^* \in U_\partial$  та  $z^* \in W(0, T)$  такі, що мають місце слабкі збіжності (на відповідних підпослідовностях)

$$z^k \rightharpoonup z^* \quad \text{в } W(0, T), \quad u^k \rightharpoonup u^* \quad \text{в } L^2(0, T)^M. \quad (6.16)$$

Покажемо, що граничні елементи пов'язані співвідношенням  $z^* = z(u^*, b^*)$ , що означає  $z^*$  є розв'язком початково-крайової задачі (6.9)–(6.11) при  $u = u^*$  та  $b = b^*$ . Дійсно, як випливає із структури інтегральної тотожності (5.2), для цього досить встановити, що при кожному значенні індекса  $j = 1, \dots, M$  має місце наступна збіжність

$$u_j^k(t) \int_{B(b_j^k, r)} z^k(t, s) ds \rightharpoonup u_j^*(t) \int_{B(b_j^*, r)} z^*(t, s) ds \text{ слабко в } L^1(Q). \quad (6.17)$$

Проте, приймаючи до уваги властивість (6.16)<sub>2</sub>, для виконання умови (6.17) досить гарантувати, що

$$\int_{B(b_j^k, r)} z^k(t, s) ds \rightarrow \int_{B(b_j^*, r)} z^*(t, s) ds \text{ сильно в } L^2(Q). \quad (6.18)$$

З цією метою зауважимо наступне: оскільки

$$\begin{aligned} \int_{B(b_j^k, r)} z^k(t, s) ds - \int_{B(b_j^*, r)} z^*(t, s) ds \\ = \int_{B(b_j^k, r)} (z^k(t, s) - z^*(t, s)) ds \\ - \int_{B(b_j^*, r) \Delta B(b_j^k, r)} z^*(t, s) ds = g^k + h^k, \end{aligned}$$

де позначено

$$B(b_j^*, r) \Delta B(b_j^k, r) = [B(b_j^*, r) \setminus B(b_j^k, r)] \cup [B(b_j^k, r) \setminus B(b_j^*, r)], \quad (6.19)$$

то приймаючи до уваги компактність вкладення  $W(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  та властивість (6.16)<sub>1</sub>, маємо:

$$\begin{aligned} \int_Q |g^k|^2 dzdt &= \int_0^T \int_\Omega \left( \int_{B(b_j^k, r)} (z^k(t, s) - z^*(t, s)) ds \right)^2 dxdt \\ &\leq |\Omega|^2 \int_0^T \int_\Omega |z^k(t, x) - z^*(t, x)|^2 dxdt \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Що стосується нев'язки  $h^k$ , то виходячи з геометричних міркувань, маємо таку оцінку для лебегової міри множин (6.19)

$$|B(b_j^*, r) \Delta B(b_j^k, r)| \leq C^* |b_j^k - b_j^*|_{\mathbb{R}^N},$$

де стала  $C^*$  не залежить від положення центрів куль  $b_j^k$  та  $b_j^*$ . Отже, за нерів-

ністю Коші – Буняковського та властивістю (6.15), приходимо до висновку

$$\begin{aligned} \int_Q |h^k(t, x)|^2 dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \left( \int_{B(b_j^*, r) \Delta B(b_j^k, r)} z^*(t, s) ds \right)^2 dx dt \\ &\leq C^* |b_j^k - b_j^*|_{\mathbb{R}^N} \int_0^T \int_\Omega \left( \int_\Omega |z^*(t, x)|^2 ds \right) dx dt \\ &= C^* |\Omega| \|z^*\|_{L^2(Q)}^2 |b_j^k - b_j^*|_{\mathbb{R}^N} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тим самим, умови (6.18), а отже і (6.17), встановлено. Отриманий результат дозволяє перейти до границі в інтегральній тотожності (5.2) при  $k \rightarrow \infty$  і показати, що трійка елементів  $(u^*, b^*, z^*)$  є допустимою для задачі (6.8)–(6.13). Що стосується оптимальності цього розв'язку, то дана обставина є прямим наслідком співвідношення (6.14) та властивості напівнеперервності знизу функціонала  $J$  відносно збіжностей (6.15)–(6.16). Таким чином, за теоремою 4.2, керування  $(u^*, b^*)$  є оптимальним і для задачі (6.2)–(6.7), що і потрібно було встановити.  $\square$

#### Бібліографічні посилання

1. *Баланенко І. Г.* Про класифікацію розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь / І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ, 2011, Вип. 3, № 8.— С. 55–73.
2. *Баланенко І. Г.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння / І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ, 2012, Вип. 4, № 8.— С. 3–18.
3. *Баланенко І. Г.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння / І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ, 2013, Вип. 5, № 8.— С. 47–61.
4. *Иваненко В. И.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник.— К. : Наукова думка, 1988. — 324 с.
5. *Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations / J.-L. Lions.— Berlin, Springer-Verlag, 1971.
6. *Lions J.-L.* Some Aspects of the Optimal Control of Distributed Parameters Systems / J.-L. Lions.— Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1972.
7. *Vazquez J. L.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential / J. L. Vazquez, E. Zuazua // J. of Functional Analysis, 2000, Vol. 173.— P. 103–153.

Надійшла до редколегії 27.03.2014