УДК 681.31

*П.И. Когут, И.В. Нечай*

# О СКАЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

## Постановка задачи векторной оптимизации

Пусть $X$ и $Y$ — два действительные банаховы пространства. Будем считать, что $X$ рефлексивно. Нулевой элемент пространства $Y$ обозначим $\theta$. Для произвольного множества $Y_0 \subset Y$ обозначим его внутренность, замыкание и границу соответственно $\mathrm{Int}_\tau Y_0$, $\mathrm{cl}_\tau Y_0$, $\partial_\tau Y_0$ относительно топологии $\tau$ ($\tau := s$ и $\tau := w$ — для случая сильной и слабой топологии $Y$ соответственно). Будем считать, что банахово пространство $Y$ полуупорядочено выпуклым $\tau$-замкнутым конусом $\Lambda$, т.е. $x \le y \Leftrightarrow y - x \in \Lambda$. Кроме этого, будем рассматривать конусы только такие, у которых $\Lambda \cap (-\Lambda) = \{\theta\}$. Элемент $y^*$ множества $Y_0 \subset Y$ назовем $\Lambda$-минимальным в множестве $Y_0$, если не существует $y \in Y_0$ такой, что $y \le y^*$, $y \ne y^*$. Совокупность всех $\Lambda$-минимальных элементов множества $Y_0$ обозначим $\Lambda - \mathrm{Min}(Y_0)$. Введем в рассмотрение два несобственных элемента $-\infty$ и $+\infty$, считая в дальнейшем, что они удовлетворяют таким условиям: 1) $-\infty \le y \le +\infty \quad \forall y \in Y$; 2) $+\infty - (+\infty) = 0$. Через $\overline{Y}$ обозначим множество $Y \cup \{\pm\infty\}$. Тогда $+\infty$ есть $\Lambda$-наибольший элемент множества $\overline{Y}$, а $-\infty$ — его $\Lambda$-наименьший элемент. Кроме этого, будет удобным следующее обозначение: $Y^\bullet = Y \cup \{+\infty\}$.

Под задачей векторной оптимизации традиционно понимают тройку $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, где $X_\partial$ — множество допустимых элементов, $f$ — показатель качества, являющийся отображением со значениями в векторном пространстве, полуупорядоченным конусом $\Lambda$. Будем считать, что $X_\partial \subset X$, $f : X_\partial \to Y$, а конус $\Lambda$ обладает всеми перечисленными выше свойствами. Понятие решения такой задачи можно ввести различными способами (см. [1–5]). Будем придерживаться следующего определения.

*Определение 1.* Элемент $x^* \in X_\partial$ называется $\Lambda_\tau$-эффективным решением задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, если его образ $f(x^*)$ является $\Lambda$-минимальным элементом $\tau$-замыкания множества $f(X_\partial)$, т.е. $f(x^*) - y \notin \Lambda \setminus \{\theta\} \quad \forall y \in \mathrm{cl}_\tau(f(X_\partial))$. Множество всех эффективных $\Lambda_\tau$-решений обозначим $\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)$.


 ISSN 0572-2691

*Определение 2* [1]. Элемент $x^* \in X_\partial$ называется эффективным решением задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, если его образ $f(x^*)$ является $\Lambda$-минимальным элементом множества $f(X_\partial)$, т.е. $f(x^*) - f(x) \notin \Lambda \setminus \{\theta\}$ $\forall x \in X_\partial$ (рис. 1).

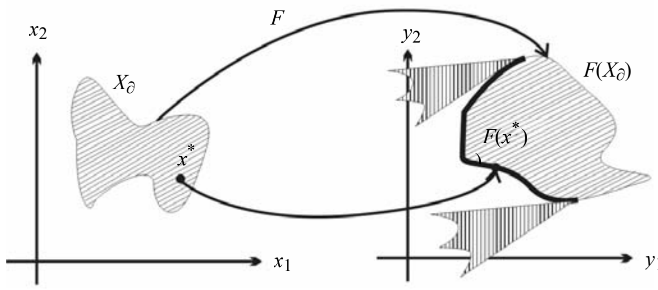


Рис. 1

*Определение* 3 [1]. Пусть $\operatorname{Int}\Lambda \neq \varnothing$. Элемент $x^* \in X_\partial$ называется слабо эффективным решением задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, если $f(x^*) - f(x) \notin \operatorname{Int}\Lambda$ $\forall x \in X_\partial$.

Множество всех эффективных решений обозначим $X_E(X_\partial, f, \Lambda)$, а $X_{wE}(X_\partial, f, \Lambda)$ — множество всех слабо эффективных решений, тогда при условии $\operatorname{Int}\Lambda \neq \varnothing$ очевидно включение: $X_E(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq X_{wE}(X_\partial, f, \Lambda)$.

**Утверждение 1.** Справедливо включение $\tau - \operatorname{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq X_E(X_\partial, f, \Lambda)$.

*Доказательство.* Пусть $x^* \in \tau - \operatorname{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)$, значит, $f(x^*) - y \notin \Lambda$ $\forall y \in \operatorname{cl}_\tau(f(X_\partial))$. Тогда $f(x^*) - f(x) \notin \Lambda$ $\forall x \in X_\partial$. Поэтому имеем $x^* \in X_E(X_\partial, f, \Lambda)$.

Таким образом, если $\operatorname{Int}\Lambda \neq \varnothing$, справедливо включение $\tau - \operatorname{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq X_E(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq X_{wE}(X_\partial, f, \Lambda)$, в общем случае (когда возможно, $\operatorname{Int}\Lambda = \varnothing$) можно только утверждать, что $\tau - \operatorname{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq X_E(X_\partial, f, \Lambda)$.

**Пример 1.** Пусть $X_\partial \subset X$, $f: X_\partial \to Y$, $\Lambda = \mathbf{R}^2_+$, множество $f(X_\partial)$ (рис. 2) имеет вид $f(X_\partial) = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Omega_i$, где

$$\Omega_1 = \{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 \geq 1, y_2 > 3, y_1 + y_2 \leq 5\},$$

$$\Omega_2 = \{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 > 2, y_2 > 2, y_1 + y_2 \leq 5\},$$

$$\Omega_3 = \{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 > 3, y_2 \geq 4, y_1 + y_2 \leq 5\},$$

$$\Omega_4 = \{y \in \mathbf{R}^2 : (2; 3), (3; 2), (3; 1)\}.$$

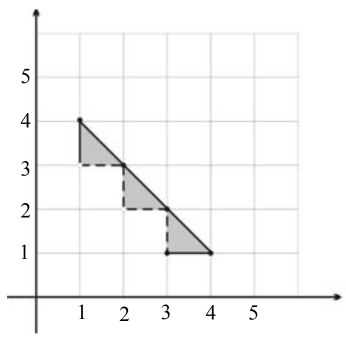


Рис. 2

Легко видеть, что

$$X_E(X_\partial, f, \Lambda) = f^{-1}(\Omega_e), \quad X_{wE}(X_\partial, f, \Lambda) = f^{-1}(\Omega_w), \quad \tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) = f^{-1}(\Omega_0),$$

где $\Omega_e = \{(2;3),(3;1)\}$, $\Omega_w = \Omega_e \cup \{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 = 1, 3 < y_2 \le 4\} \bigcup \{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 = 1, 3 \le y_1 \le 4\}$, $\Omega_0 = \{(3;1)\}$.

В этом примере между множествами решений задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, определенными тремя указанными способами, имеем следующее соотношение:

$$\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \subset X_E(X_\partial, f, \Lambda) \subset X_{wE}(X_\partial, f, \Lambda).$$

**Достаточные условия существования $\Lambda_\tau$-эффективных решений**

Известно, что задача скалярной оптимизации с полунепрерывным снизу критерием качества, определенном на компактном множестве допустимых значений, имеет решение. Аналогичный результат имеет место и для задач векторной оптимизации, однако дать определение понятия решения задачи в этом случае и определение понятия полунепрерывности снизу векторнозначного отображения можно различными способами. Следующие два определения сформулированы для отображений, определенных на всем пространстве *X*. Это предположение не является существенным. Будем, как это делают традиционно, с векторнозначными отображениями вида $f : X_\partial \to Y$ связывать отображения $\hat{f} : X \to Y^\bullet$, где

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x), & x \in X_\partial, \\ +\infty, & x \notin X_\partial. \end{cases}$$

Для отображений *f*, действующих в полурасширенное пространство $Y^\bullet$, будем использовать такое определение эффективного множества: $Dom f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$.

*Определение 4* [6]. Отображение $f : X \to Y^\bullet$ называется полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in \mathrm{Dom} F$, если для любой окрестности *V* точки $f(x_0)$ в *Y* существует окрестность *U* точки $x_0$ в *X* такая, что $f(U) \subset V + \Lambda \cup \{+\infty\}$. Отображение $f : X \to Y^\bullet$ называется полунепрерывным снизу, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке *X*.

**Утверждение 2** [7]. Пусть $X_\partial$ — непустое и компактное множество в *X*, $f : X_\partial \to Y$ — полунепрерывное снизу отображение. Тогда $X_E(X_\partial, f, \Lambda) \ne \varnothing$.

Сразу можно заметить чрезмерную жесткость достаточных условий, приведенных в теореме 1. Для ослабления этих требований приведем еще одно определение.

*Определение 5* [7]. Отображение $f : X \to Y^\bullet$ называется (слабо) *q*-полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in \mathrm{Dom} f$, если для любого $b \in Y$ такого, что $b \ngeq f(x_0)$, существует (слабая) окрестность *U* точки $x_0$ в *X* такая, что $b \ngeq f(x)$ $\forall x \notin U \cap \mathrm{Dom} f$.

Известно [7], что если отображение $F : X \to Y^\bullet$ полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in \mathrm{Dom} f$, то оно и *q*-полунепрерывно снизу в этой точке, обратное утверждение в общем случае ложно. Легко привести примеры отображений, которые не являются даже *q*-полунепрерывными снизу, но $\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \ne \varnothing$.

 ISSN 0572-2691

**Пример 2.** Пусть $f:[-3;-1]\subset \mathbf{R}\to \mathbf{R}^2$, $\Lambda=\mathbf{R}^{\mathbf{2}}_{+}$,

$$f(x)=\begin{cases}(-x;2), & x\in[-3;-1),\\ (2;1), & x=-1.\end{cases}$$

Это отображение (рис. 3) не является $q$-полунепрерывным снизу в точке $x_0=-1$. Действительно, возьмем $b=(3/2;3)$. Очевидно, $b\ngeq f(x_0)$ и не существует окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$ такой, что $b\ngeq f(x)$ для всех $x\in U(x_0)\cap X_\partial$. В то же время, очевидно, что $\tau-\mathrm{Sol}(X_\partial, f,\Lambda)=\{-1\}$.

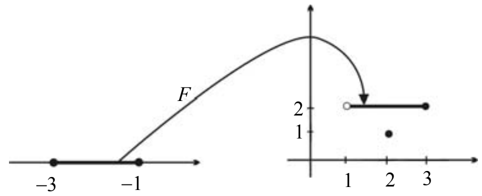


Рис. 3

Проводя дальше аналогию со скалярным случаем, заметим, что полунепрерывность снизу скалярной функции в точке является необходимым условием принадлежности этой точки множеству решений задачи оптимизации, однако для векторнозначного отображения из примера 2 $q$-полунепрерывность снизу нарушается именно в точке $x_0$, которая является решением задачи векторной оптимизации. Именно поэтому в данной работе будем придерживаться другого понятия полунепрерывности снизу векторнозначного отображения (определение 9). Сначала введем ряд вспомогательных определений.

*Определение 6.* Эффективным $\Lambda_\tau$-инфимумом множества $Y_0\subset Y$ назовем множество $\Lambda$-минимальных элементов $\tau$-замыкания множества $Y_0\subset Y$ в пространстве $Y$ в случае, когда это множество непустое, и множество $\{-\infty\}$ в противном случае:

$$\Lambda_\tau-\mathrm{Inf}\,Y_0=\begin{cases}\Lambda-\mathrm{Min}(\mathrm{cl}_\tau Y_0), & \Lambda-\mathrm{Min}(\mathrm{cl}_\tau Y_0)\neq\varnothing,\\ \{-\infty\}, & \Lambda-\mathrm{Min}(\mathrm{cl}_\tau Y_0)=\varnothing.\end{cases}$$

*Определение 7.* Эффективным $\Lambda_\tau$-инфимумом отображения $f:X_\partial\to Y$ назовем подмножество множества $Y$ и обозначим $\Lambda_\tau-\operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x)$, которое является эффективным $\Lambda_\tau$-инфимумом образа $f(X_\partial)$ множества $X_\partial$, т.е.

$$\Lambda_\tau-\operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x)=\Lambda_\tau-\mathrm{Inf}\,f(X_\partial).$$

Таким образом, множество $\Lambda_\tau$-эффективных решений задачи $\langle X_\partial, f,\Lambda\rangle$ можно задать формулой

$$\tau-\mathrm{Sol}(X_\partial, f,\Lambda)=\{x^*\in X_\partial : f(x^*)\in\Lambda_\tau-\operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x)\}.$$

Пусть дана последовательность $\{y_n\}\subset Y$, $L^\tau\{y_n\}$ — множество всех ее $\tau$-предельных точек. Для неограниченных снизу (сверху) последовательностей будем считать, что $-\infty\in L^\tau\{y_n\}$ $(+\infty\in L^\tau\{y_n\})$. Для произвольного отображения $f:X\to Y^\bullet$ используем множества $L_s^\tau(f(x_0))=\bigcup\limits_{\{x_n\}\xrightarrow{s}x_0} L^\tau\{f(x_n)\}$ и $L_w^\tau(f(x_0))=\bigcup\limits_{\{x_n\}\xrightarrow{w}x_0} L^\tau\{f(x_n)\}$, где $\{x_n\}\xrightarrow{s}x_0$ и $\{x_n\}\xrightarrow{w}x_0$ обозначают сходимость последовательности $\{x_n\}$ относительно сильной и слабой топологий пространства $X$ соответственно. Тогда справедливо включение $L_s^{\tau}(f(x_0)) \subseteq$ $\subseteq L_w^{\tau}(f(x_0))$.

*Определение 8*. Множество $\Lambda_\tau - \liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \subset \overline{Y}$ назовем секвенциальным $\Lambda_\tau$-нижним пределом отображения $f: X_\partial \to Y$ в точке $x_0 \in X_\partial$, если

$$\Lambda_\tau - \liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} L_s^{\tau}(f(x_0)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x), & L_s^{\tau}(f(x_0)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) \neq \varnothing, \\ \Lambda_\tau - \operatorname{Inf} L_s^{\tau}(f(x_0)), & L_s^{\tau}(f(x_0)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) = \varnothing. \end{cases}$$

Множество $\Lambda_\tau - \liminf\limits_{x \xrightarrow{w} x_0} f(x) \subset \overline{Y}$ назовем слабым секвенциальным $\Lambda_\tau$-нижним пределом отображения $f: X_\partial \to Y$ в точке $x_0 \in X_\partial$, если

$$\Lambda_\tau - \liminf_{x \xrightarrow{w} x_0} f(x) = \begin{cases} L_w^{\tau}(f(x_0)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x), & L_w^{\tau}(f(x_0)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) \neq \varnothing, \\ \Lambda_\tau - \operatorname{Inf} L_w^{\tau}(f(x_0)), & L_w^{\tau}(f(x_0)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) = \varnothing. \end{cases}$$

*Определение 9*. Отображение $f: X_\partial \to Y$ назовем $\Lambda_\tau$-полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X_\partial$, если $f(x_0) \in \Lambda_\tau - \liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

Отображение $f: X_\partial \to Y$ будем называть слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X_\partial$, если $f(x_0) \in \Lambda_\tau - \liminf\limits_{x \xrightarrow{w} x_0} f(x)$.

Из определений 8 и 9 следует, что любое слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывное снизу отображение в точке $x_0 \in X_\partial$, является также $\Lambda_\tau$-полунепрерывным снизу в этой точке. Если отображение $f$ $\Lambda_\tau$-полунепрерывно (слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно) снизу в каждой точке $x \in X_\partial$, будем называть $f$ $\Lambda_\tau$-полунепрерывным (слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывным) снизу отображением.

*Определение 10* [7]. Элемент $y^* \in Y_0 \subset Y$ называется $\Lambda$-наименьшим элементом ($\Lambda$-идеальным минимумом) множества $Y_0$, если $y^* \leq y \quad \forall y \in Y_0$. Использовать обозначение $y^* = \Lambda - \operatorname{I Min} Y_0$.

**Лемма.** Пусть отображение $f: X_\partial \to Y$ слабо $q$-полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X_\partial$. Тогда $f(x_0)$ — $\Lambda$-наименьший элемент множества $L_w^{\tau}(f(x_0))$, т.е. $f(x_0) = \Lambda - \operatorname{I Min} L_w^{\tau}(f(x_0))$.

*Доказательство.* Пусть $y^* \in L_w^{\tau}(f(x_0))$, тогда существует последовательность $\{x_n\} \xrightarrow{w} x_0$ такая, что $\{f(x_n)\} \xrightarrow{\tau} y^*$. Введем в рассмотрение множество $B = \{b \in Y : b \ngeq f(x_0)\}$, и пусть $U_b(x_0)$ — слабая окрестность точки $x_0$ такая, что $b \ngeq f(x) \ \forall x \in U_b(x_0) \cap X_\partial$. Пусть $\widetilde{U}(x_0) = \bigcap\limits_{b \in B} U_b(x_0)$, тогда существует $n^* \in \mathbf{N}$ такое, что

$$x_n \in \widetilde{U}(x_0) \quad \forall n \geq n^*. \tag{1}$$

Докажем, что $f(x_n) \notin B \ \forall n \geq n^*$. Для этого сначала сделаем обратное предположение:

$$\text{существует } p \in \mathbf{N}, \ \ p \geq n^*, \text{ такое, что } f(x_p) \in B, \tag{2}$$

 ISSN 0572-2691

тогда $f(x_p) \ngeq f(x) \quad \forall x \in U_{f(x_p)}(x_0) \cap X_\partial$. Поскольку справедливо включение

$$(\widetilde{U}(x_0) \cap X_\partial) \subset (U_{f(x_p)}(x_0) \cap X_\partial),$$

имеем

$$f(x_p) \ngeq f(x) \quad \forall x \in \widetilde{U}(x_0) \cap X_\partial. \tag{3}$$

Далее, учитывая (3), получаем: $f(x_p) \neq f(x_p)$. Таким образом, предположение (2) ложно, поэтому $f(x_n) \notin B \; \forall n \geq n^*$, т.е. $f(x_n) \geq f(x_0)$, $\forall n \geq n^*$. Отсюда, переходя к слабому пределу, получаем $f(x_0) \leq y^*$.

**Теорема 1.** Пусть отображение $f : X_\partial \to Y$ слабо $q$-полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X_\partial$. Тогда $f$ слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно снизу в точке $x_0$.

*Доказательство.* Согласно лемме верно равенство $f(x_0) = \Lambda - \mathrm{I\,Min}\, L_w^\tau(f(x_0))$, тогда

$$\Lambda_\tau - \mathrm{Inf}\; L_w^\tau(f(x_0)) = \{\Lambda - \mathrm{I\,Min}\, L_w^\tau(f(x_0))\} = \{f(x_0)\}.$$

Поэтому согласно определению 8 $\Lambda_\tau - \liminf\limits_{x \xrightarrow{w} x_0} f(x) = \{\Lambda - \mathrm{I\,Min}\, L_w^\tau(f(x_0))\} = \{f(x_0)\}$. Итак, по определению 9 $f$ слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно снизу в точке $x_0$.

*Определение 10.* Последовательность $\{x_n\} \subset X_\partial$ назовем $\Lambda_\tau$-минимизирующей для отображения $f : X_\partial \to Y$, если существует элемент $\xi \in \Lambda_\tau - \mathrm{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x)$ такой, что $\{f(x_n)\} \xrightarrow{\tau} \xi$.

**Теорема 2.** Пусть отображение $f : X_\partial \to Y$ слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно снизу, а множество $X_\partial$ слабо замкнуто и ограничено в пространстве $X$. Тогда:

1) отображение $f$ $\Lambda_\tau$-ограничено снизу;

2) всякая $\Lambda_\tau$-минимизирующая последовательность $\{x_n\} \subset X_\partial$ имеет предельную точку;

3) если $x^*$ — предельная точка $\Lambda_\tau$-минимизирующей последовательности $\{x_n\} \subset X_\partial$, то $x^*$ есть $\Lambda_\tau$-эффективным решением задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle : x^* \in \Lambda_\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)$;

4) $\Lambda_\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \neq \varnothing$.

*Доказательство*. Согласно определениям 6, 7 $\Lambda_\tau - \mathrm{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) \neq \varnothing$ (возможно, $\Lambda_\tau - \mathrm{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) = \{-\infty\}$). Возьмем произвольный элемент $y^* \in \Lambda_\tau - \mathrm{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x)$, тогда существует последовательность $\{y_n\} \subset f(X_\partial)$ такая, что $\{y_n\} \xrightarrow{\tau} y^*$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{f^{-1}(y_n)\}$, которая по условию является ограниченной. Учитывая рефлексивность пространства $X$, обозначим $\{x_\mu\}$ такую подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, что $\{x_\mu\} \xrightarrow{w} x^*$, где $x^* \in X$. Учитывая, что $\{x_n\} \subset X_\partial$ и то, что $X_\partial$ слабо замкнутое, делаем вывод, что $x^* \in X_\partial$. Так как отображение $f : X_\partial \to Y$ слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно снизу, справедливо включение

$$f(x^*) \in \Lambda_\tau - \liminf_{x \xrightarrow{w} x^*} f(x), \tag{4}$$

которое делает невозможным предположение $\Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x) = (-\infty)$. Кроме этого, очевидно, что $y^* \in L_w^\tau(f(x^*))$; таким образом, $y^* \in (L_w^\tau(f(x^*)) \cap \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x)) \neq \varnothing$. Тогда по определению 8

$$\Lambda_\tau - \liminf_{x \xrightarrow{w} x^*} f(x) = L_w^\tau(f(x^*)) \cap \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x). \tag{5}$$

Из (5) и (6) следует, что $f(x^*) \in \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x)$, т.е. $x^* \in \Lambda_\tau - \mathrm{Sol}\,(X_\partial, f, \Lambda)$.

### Некоторые свойства линейных сверток векторнозначных отображений

Обозначим через $Y^*$ пространство, топологично сопряженное к пространству $Y$, значение линейного функционала $y^* \in Y^*$ на элементе $y \in Y - \langle y^*, y \rangle$. Линейный функционал $y^* \in Y^*$, определенный на конусе $\Lambda \subset Y$, называется положительным [3], если $\langle y^*, \lambda \rangle \geq 0 \ \forall \lambda \in \Lambda$. Обозначим $\Lambda^*$ множество всех линейных положительных функционалов. Известно [3], что $\Lambda^*$ — конус, а если $\Lambda \neq Y$, то $\Lambda^*$ содержит ненулевые элементы. Конус $\Lambda^*$ назовем сопряженным к конусу $\Lambda$. В дальнейшем будем считать пространство $Y$ рефлексивным, поэтому верно следующее равенство: $(\Lambda^*)^* = \Lambda$.

*Определение 10.* $\lambda$-сверткой $(\lambda \in \Lambda^*)$ отображения $f : X_\partial \to Y$ будем называть скалярную функцию $f_\lambda : X_\partial \to \mathbf{R}$, которая определена по правилу: $f_\lambda(x) = \langle \lambda, f(x) \rangle \ \forall x \in X_\partial$.

В случае когда пространства $X$ и $Y$ конечномерные и $\Lambda = \Lambda^* = \mathbf{R}_+^m$, имеет место следующий результат.

**Утверждение 3** [7]. Пусть $X = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbf{R}^m$. Предположим, что $x^* \in \operatorname*{Arg\,min}_{x\in X_\partial} \langle \lambda, f(x) \rangle$, $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$. Тогда:

1) $x^* \in X_{wE}(X_\partial, f, \mathbf{R}_+^m)$;

2) если $\lambda \in \mathrm{int}\,(\mathbb{R}_+^m)$, то $x^* \in X_E(X_\partial, f, \mathbf{R}_+^m)$;

3) если $\{x^*\} = \operatorname*{Arg\,min}_{x\in X_\partial} \langle \lambda, f(x) \rangle$, то $x^* \in X_E(X_\partial, f, \mathbf{R}_+^m)$ и не существует $\bar{x} \in X_\partial$ такого, что $f(x^*) = f(\bar{x})$.

Поскольку даже в случае конечномерных пространств $X$ и $Y$ может выполняться строгое включение $\tau - \mathrm{Sol}\,(X_\partial, f, \Lambda) \subset X_E(X_\partial, f, \Lambda)$ (пример 1), ни одно соотношение между $\Lambda_\tau$-эффективными решениями задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$ и решениями задачи минимизации для $\lambda$-свертки не следует из этого утверждения, этот вопрос требует дополнительного исследования. Покажем сначала, что если вместо множества эффективных решений задачи $\langle X_\partial, f, \mathbf{R}_+^m \rangle$ рассматривать множество $\Lambda_\tau$-эффективных решений, аналог вывода 3) утверждения 2 уже не будет иметь места.

**Пример 3.** Пусть $f : [1; 2] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\Lambda = \mathbf{R}_+^2$,

$$f(x) = \begin{cases} (x; 1), & x \in (1; 2], \\ (1; 2), & x = 1. \end{cases}$$

Возьмем $\lambda = (1; 0)$, тогда $\langle \lambda, f(x) \rangle = x$, $\operatorname*{Arg\,min}_{x \in [1;\,2]} \langle \lambda, f(x) \rangle = \{1\}$, однако (рис. 4)

$$\Lambda_\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \mathbb{R}^2_+) = \varnothing.$$

Кроме того, поскольку было введено новое определение решения задачи векторной оптимизации, для которого, как демонстрирует пример 3, аналог утверждения 2 требует уточненной формулировки, мы рассматриваем случай бесконечномерных пространств $X$ и $Y$ и конус $\Lambda$ с возможно пустой внутренностью. К тому же, необходимо учесть тот факт, что внутренность сопряженного конуса $\Lambda^*$ также может быть пустой. Все эти моменты значительно усложняют ситуацию, однако, чтобы получить результат для банаховых пространств, аналогичный п. 2 утверждения 2, можно отказаться от понятия внутренней точки сопряженного конуса $\Lambda^*$ и заменить его более слабым понятием квазивнутренней точки.

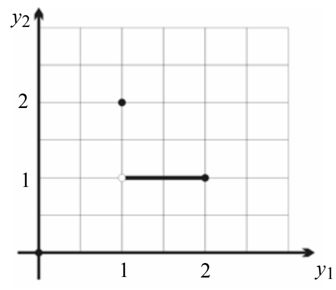


Рис. 4

*Определение 11* [8]. Точка $g^* \in Y^*$ называется квазивнутренней точкой конуса $\Lambda^*$, если $\langle g^*, \lambda \rangle > 0$, при каждом ненулевом $\lambda \in \Lambda$. Множество всех квазивнутренних точек конуса $\Lambda^*$ обозначим $\Lambda^*_0$.

Известно [8], что в случае телесного (с непустой внутренностью) конуса $\Lambda^*$ справедливо равенство $\Lambda^*_0 = \operatorname{int} \Lambda^*$, однако квазивнутренние точки существуют в конусах $\Lambda^*$, не являющихся телесными.

**Теорема 3.** Пусть $X$ и $Y$ — рефлексивные банаховы пространства. Пусть $x^* \in \operatorname*{Arg\,min}_{x \in X_\partial} \langle \lambda^*, f(x) \rangle$, $\lambda^* \in \Lambda^*_0$. Тогда $x^* \in \Lambda_\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)$.

*Доказательство*. Согласно условию $\langle \lambda^*, f(x^*) \rangle \le \langle \lambda^*, f(x) \rangle \ \forall x \in X_\partial$, т.е.

$$\langle \lambda^*, f(x^*) - f(x) \rangle \le 0 \quad \forall x \in X_\partial. \tag{6}$$

Возьмем произвольный элемент $z \in \mathrm{cl}_\tau f(X_\partial)$, тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset X_\partial$ такая, что $\{f(x_n)\} \xrightarrow{\tau} z$ и в силу (6)

$$\langle \lambda^*, f(x^*) - f(x_n) \rangle \le 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Переходя в неравенстве (7) к $\tau$-пределу, получаем

$$\langle \lambda^*, f(x^*) - z \rangle \le 0, \quad \forall z \in \mathrm{cl}_\tau(f(X_\partial)). \tag{8}$$

Пусть $\lambda^* \in \Lambda^*_0$. Предположим, что $x^* \notin \tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)$, тогда существует $y \in cl_\tau f(X_\partial)$ такой, что $y < f(x^*)$. Таким образом, $f(x^*) - y \in \Lambda \setminus \{\theta\}$. Тогда по определению 11 имеем $\langle \lambda^*, f(x^*) - y \rangle > 0$, что противоречит неравенству (8). Итак, $x^* \in \tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)$.

*Следствие.* Пусть $X$ и $Y$ — рефлексивные банаховы пространства. Тогда справедливо

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda^*_0} \operatorname*{Arg\,min}_{x \in X_\partial} \langle \lambda, f(x) \rangle \subset (\Lambda_s - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \cap \Lambda_w - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda)). \tag{9}$$

Таким образом, установлен результат аналогичный п. 2) утверждения 2. В примере 3 было показано, что просто переформулировать п. 3) утверждения 2 для задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda\rangle$ в терминах $\Lambda_\tau$-эффективных решений будет неверным. Даже, если несколько ослабить понятие $\Lambda_\tau$-эффективного решения, а именно: ввести понятие обобщенного $\Lambda_\tau$-эффективного решения, аналог п. 3) утверждения 2 не будет иметь места (см. пример 4).

*Определение 12.* Назовем $x^* \in X_\partial$ обобщенным $\Lambda_\tau$-эффективным решением задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda\rangle$, если существуют последовательность $\{x_n\} \subset X_\partial$ и элемент $\xi \in \Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x)$ такие, что $\{x_n\} \xrightarrow{w} x^*$ и $\{f(x_n)\} \xrightarrow{\tau} \xi$. Множество всех обобщенных $\Lambda_\tau$-эффективных решений задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda\rangle$ обозначим $\Lambda_\tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$.

Легко видеть, что $\Lambda_\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq \Lambda_\tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$. Заметим, что множество $\Lambda_\tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$ не имеет прямой связи со множеством $X_E(X_\partial, f, \Lambda)$. Для иллюстрации отличий между этими множествами рассмотрим следующий пример.

**Пример 4.** Пусть $f : [1; 2] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\Lambda = \mathbf{R}^2_+$,

$$f(x) = \begin{cases} (x; x), & x \in (1; 2); \\ (1; 2), & x = 2; \\ (2; 1), & x = 1. \end{cases}$$

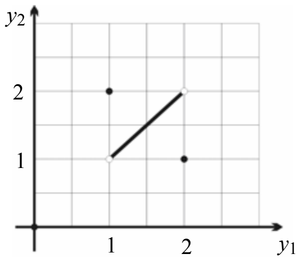

Рис. 5

В этом случае имеем (рис. 5): $\Lambda - \mathrm{Min}\,(f(X_\partial)) = \{(1; 2); (2; 1)\}$, поэтому $X_E(X_\partial, f, \Lambda) = \{1; 2\}$; $\Lambda_\tau - \operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} f(x) = \{(1; 1)\}$, значит, $\Lambda_\tau - \mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) = \varnothing$. Однако последовательность $\{x_n = 1 + 1/n\}$ такая, что $\{x_n\} \to 1$ и $\{f(x_n)\} \xrightarrow{\tau} (1; 1)$, тогда по определению 12, $1 \in \Lambda_\tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$. К тому же других элементов, удовлетворяющих определению 12, нет. Итак, $\Lambda_\tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda) = \{1\}$. Если $\lambda = (1; 0)$, то $\lambda$-свертка примет вид

$$\langle \lambda, f(x)\rangle = \begin{cases} x, & x \in (1; 2); \\ 1, & x = 2; \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Тогда $\operatorname*{Arg\,min}_{x\in[1;\,2]} \langle \lambda, f(x)\rangle = \{2\} \notin \Lambda_\tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$, т.е. единственное решение задачи минимизации для $\lambda$-свертки может не являться даже обобщенным $\Lambda_\tau$-эффективным решением исходной задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda\rangle$.

Рассмотрим теперь частный случай задачи $\langle X_\partial, f, \Lambda\rangle$, когда множество $X_\partial$ ограничено и слабо замкнуто, а отображение $f$ слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно снизу, т.е. случай, в котором известно, что задача разрешима (теорема 2). Для того чтобы включение (9) получило возможность практического применения, необходимо, чтобы

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0^*} \operatorname*{Arg\,min}_{x\in X_\partial} \langle \lambda, f(x)\rangle \neq \varnothing. \tag{10}$$


ISSN 0572-2691

Очевидно, если для отображения $f$ найдется $\lambda^* \in \Lambda_0^*$ такое, что $\lambda^*$-свертка будет слабо полунепрерывной снизу, то неравенство (10) будет справедливым. Возникает вопрос: можно ли для любого $\Lambda_\tau$-полунепрерывного снизу отображения $f$ гарантировать существование такой свертки? Следующий пример дает отрицательный ответ.

**Пример 5.** Пусть $f:[1;2]\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$, $\Lambda=\mathbf{R}_+^2$,

$$f(x)=\begin{cases}(x;1), & x\in[1;2]\setminus\left\{1+\dfrac{1}{n},\, n\in\mathbf{N}\right\}\\ (0;1+n), & x=1+\dfrac{1}{n},\, n\in\mathbf{N}.\end{cases}.$$

Пусть $u=1$, тогда $\Lambda_\tau-\liminf\limits_{x\to u} f(x)=\{(1;1)\}$ и $f$ $\Lambda_\tau$-полунепрерывно в этой точке (рис. 6). Пусть $v_n=1+\dfrac{1}{n}$, тогда $\Lambda_\tau-\liminf\limits_{x\to v_n} f(x)=\left\{(0;1+n);\left(1+\dfrac{1}{n};1\right)\right\}$ и $f$ $\Lambda_\tau$-полунепрерывно в этих точках. Рассмотрим $\lambda$-свертку отображения $f$:

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda_1 x+\lambda_2, & x\neq 1+\dfrac{1}{n},\\ \lambda_2(1+n), & x=1+\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

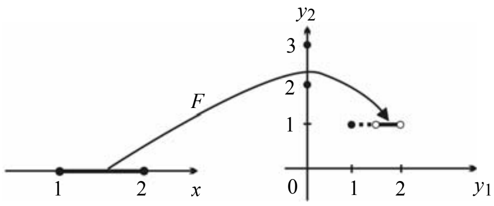


Рис. 6

Для полунепрерывности $f_\lambda(x)$ в точках $v_n=1+\dfrac{1}{n}$ необходимо выполнение неравенства

$$\lambda_2(1+n)\le\lambda_1\left(1+\frac{1}{n}\right)+\lambda_2\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Переходя к пределу и учитывая неотрицательность вектора $\lambda$, получаем $\lambda_2=0$. Тогда $\lambda$-свертка принимает следующий вид:

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda_1 x, & x\neq 1+\dfrac{1}{n},\\ 0, & x=1+\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

Однако если $\lambda_1>0$, для последовательности $x_n=1+\dfrac{1}{n}$ не будет выполняться неравенство

$$f_\lambda(1)\le\liminf_{n\to\infty} f(x_n),$$

т. е. функция $f_\lambda(x)$ не будет полунепрерывной снизу в точке 1. Поэтому для данного отображения единственной полунепрерывной снизу сверткой будет $f_\lambda(x)\equiv 0$.

Итак, относительно множества $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0^*} \operatorname{Arg}\min_{x\in X_\partial}\langle\lambda, f(x)\rangle$ в общем случае нельзя утверждать, что оно пустое. Рассмотрим теперь множество $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0^*} \operatorname{Arg}\min_{x\in X_\partial}\widetilde{f}_\lambda(x)$, где $\widetilde{f}_\lambda(x)$ — слабо полунепрерывная снизу регуляризация свертки $\langle\lambda, f(x)\rangle$. В рамках ситуации, когда множество $X_\partial$ ограничено и слабо замкнуто, очевидно, что $\operatorname{Arg}\min_{x\in X_\partial}\widetilde{f}_\lambda(x)\neq\varnothing$ при каждом $\lambda\in\Lambda_0^*$. Вместе с тем справедлив следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть $X$ и $Y$ — рефлексивные банаховы пространства, множество $X_\partial\subset X$ ограничено и слабо замкнуто, отображение $f: X_\partial\to Y$ слабо $\Lambda_\tau$-полунепрерывно снизу. Тогда справедливо включение:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0^*} \operatorname{Arg}\min_{x\in X_\partial}\widetilde{f}_\lambda(x)\subseteq\tau-\operatorname{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda).$$

*Доказательство.* Пусть $\lambda\in\Lambda_0^*$. Из условия следует, что $\operatorname{Arg}\min_{x\in X_\partial}\widetilde{f}_\lambda(x)\neq\varnothing$. Возьмем $x^*\in\operatorname{Arg}\min_{x\in X_\partial}\widetilde{f}_\lambda(x)\neq\varnothing$, тогда

$$\widetilde{f}_\lambda(x^*)\le\widetilde{f}_\lambda(x),\ \forall x\in X_\partial. \tag{11}$$

Так как $\widetilde{f}_\lambda(x)$ — слабо полунепрерывна снизу регуляризация свертки $\langle\lambda, f(x)\rangle$, можно утверждать следующее:

- во-первых, существует последовательность $\{x_n\}\xrightarrow{w}x^*$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\langle\lambda, f(x_n)\rangle=\widetilde{f}_\lambda(x^*); \tag{12}$$

- во-вторых,

$$\widetilde{f}_\lambda(x)\le\langle\lambda, f(x)\rangle\quad\forall x\in X_\partial. \tag{13}$$

Из (11)–(13) делаем вывод: существует последовательность $\{x_n\}\xrightarrow{w}x^*$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\langle\lambda, f(x_n)\rangle\le\langle\lambda, f(x)\rangle\ \ \forall x\in X_\partial$, или

$$\left\langle\lambda, \lim_{n\to\infty}f(x_n)\right\rangle\le\langle\lambda, f(x)\rangle\quad\forall x\in X_\partial. \tag{14}$$

Предположим, что $x^*\notin\tau-\operatorname{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$, тогда по определению 12 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)\notin\Lambda_\tau-\operatorname{Inf}_{x\in X_\partial}f(x)$, т.е. существует $\xi\in\Lambda_\tau-\operatorname{Inf}_{x\in X_\partial}f(x)$ такое, что $\xi<\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ или $\lim_{n\to\infty}f(x_n)-\xi\in\Lambda\setminus\{\theta\}$. Тогда по определению $\Lambda_0^*$ приходим к неравенству $\left\langle\lambda, \lim_{n\to\infty}f(x_n)-\xi\right\rangle>0$, которое запишем так:

$$\left\langle\lambda, \lim_{n\to\infty}f(x_n)\right\rangle>\langle\lambda, \xi\rangle. \tag{15}$$

С другой стороны, существует последовательность $\{u_n\}\subset X_\partial$ такая, что $\{f(u_n)\}\xrightarrow{\tau}\xi$. Учитывая слабую компактность $X_\partial$, можно считать, что


ISSN 0572-2691

$\{u_n\} \xrightarrow{w} u^* \in X_\partial$. Из неравенства (14) делаем вывод: $\left\langle \lambda, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \right\rangle \le$ $\le \left\langle \lambda, f(u_n) \right\rangle$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство $\left\langle \lambda, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \right\rangle \le \left\langle \lambda, \xi \right\rangle$, которое противоречит (15). Значит, сделанное предположение ложно. Таким образом, $x^* \in \tau - \mathrm{GenSol}(X_\partial, f, \Lambda)$.

*П.І. Когут, І.В. Нечай*

## ПРО СКАЛЯРИЗАЦІЮ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМИЗАЦІЇ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Розглянуто клас задач нескалярної оптимізації в банахових просторах, показником якості яких не обов'язково є непеперервне знизу відображення. Наведено умови розв'язання таких задач і показано, що деяку частину множини розв'язків можна отримати в результаті процедури скаляризації. Наведено ілюстративні приклади.

*P.I. Kogut, I.V. Nechay*

## ON SCALARIZATION OF ONE CLASS OF VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS IN BANACH SPACES

The main focus of this work is the one class of vector optimization problems with mapping that is not necessarily lower semicontinuous. The sufficient conditions of existence efficient solutions of such problems are given. We show that certain part of set of efficient solutions can be achieved by using the scalarization technique. All main theoretical notions are supported by illustrative examples.

1. *Ehrgott M., Gandibleux X.* Multiple criteria optimization : State of the art annotated bibliographic surveys. — Dordrecht : Kluwer Academ. Publ., 2003. — 496 p.
2. *Miglierina, E. Molho E., Rocca M.* Well-posedness and scalarization in vector optimization // J. of Optimization Theory and Appl. — 2005. — **126**, N 2 — P. 391–409.
3. *Ng K.F., Zheng X.Y.* Existence of efficient points in vector optimization and generalized Bishop–Phelps theorem // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — **115.** — P. 29–47.
4. *Ginchev I., Guerraggio A., Rocca M.* Second-order in conditions in $C^{1,1}$ vector optimization with inequality and equality constraints. Recent advances in optimization // Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. — 563. — Berlin : Springer, 2006. — P. 29−44.
5. *Santos L.B., Brandao A.J.V., Osuna-Gomez, R. Rojas-Medar M.A.* Prenvex functions and weak efficicient solutions for some vectorial optimization problems in Banach spaces // Computers & Mathemat. with Appl. — 2004. — **48**. — P. 885−895.
6. *Mansour M., Metrane A., Thera M.* Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings. Universite de Limoges, Rapport de recherché n 2004-06. Depose le juin 2004. — 29 p.
7. *Ehrgott M.* Multicriteria optimization. — Berlin : Springer, 2005. — 323 p.
8. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

*Получено 10.01.2008*

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Чикрием