ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2013. Вип. 5. С. 1–15

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.977.56

ВАРІАЦІЙНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

С. О. Горбонос*, П. І. Когут**

**Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: gorbonos.so@gmail.com*

***Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Досліджено задачу оптимального керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами. Введено поняття варіаційного розв'язку поставленої задачі керування та встановлено умови його існування.

Ключові слова: задача оптимізації, слабкий розв'язок, кососиметричні матриці, варіаційний розв'язок.

1. Вступ

У статті досліджується задача оптимального керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами. Особливість даного класу задач полягає в тому, що матриця потоку є кососиметричною, а її елементи належать простору $L^2(\Omega)$. Показано, що відповідна початково-крайова задача є некоректною. Залучаючи L^∞-апроксимацію матриці потоку та метод Гальоркіна, отримано умови, за яких оптимальні розв'язки вихідної задачі оптимального керування можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач.

2. Попередні результати та позначення

В даному параграфі наведемо основні позначення, поняття та факти з функціонального аналізу, які необхідні для подальшого розгляду поставленої задачі.

Нехай Ω — відкрита обмежена з Ліпшицевою межею підмножина простору $\mathbb{R}^N$, де $N \geq 2$. Нехай межа Ω складається з двох частин, які не перетинаються, тобто $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Множини Γ_1 і Γ_2 є $(N-1)$-вимірними. Надалі через $|E|$ будемо позначати міру Лебега $\mathcal{L}^N(E)$ будь-якої вимірної множини $E \subset \Omega$. χ_E — характеристична функція множини $E \subset \Omega$, тобто $\chi_E(x) = 1$, якщо $x \in E$ і $\chi_E(x) = 0$, якщо $x \notin E$.

Через $\mathbb{S}^N$ будемо позначати множину всіх кососиметричних матриць $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^N$, тобто C це квадратна матриця така, що $c_{ij} = -c_{ji}$, а отже $c_{ii} = 0$.

Слід зауважити, що множина $\mathbb{S}^N$ може бути ототожнена з евклідовим простором $\mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}$. Нехай $L^2(\Omega)^{\frac{N(N-1)}{2}} = L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ — простір вимірних інтегровних в квадраті функцій, значеннями яких є кососиметричні матриці. Цей простір будемо наділяти нормою

$$\|A\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)} = \left(\int_\Omega \left(\max_{\substack{i,j=1,\dots,N \\ j>i}} |a_{ij}(x)| \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Введемо поняття варіаційної збіжності задач оптимального керування. Нехай

$$\min\{I_\varepsilon(u,y) : (u,y) \in \Xi_\varepsilon\} \tag{2.1}$$

є параметризованою задачею оптимального керування, де ε — малий параметр, $I_\varepsilon : \mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon \to \overline{\mathbb{R}}$ — функціонал вартості, $\mathbb{Y}_\varepsilon$ — простір станів, $\mathbb{U}_\varepsilon$ — простір керувань, а Ξ_ε — множина всіх допустимих пар. Далі кожну задачу оптимального керування (2.1) пов'яжемо з відповідною задачею умовної оптимізації:

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y) \right\rangle. \tag{2.2}$$

Припустимо, що існує банахів простір $\mathbb{U} \times \mathbb{Y}$, відносно якого є означеною τ-збіжність в шкалі просторів $\{\mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Означення 2.1. Задача $\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \right\rangle$ називається варіаційною границею послідовності (2.2) при $\varepsilon \to 0$

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y) \right\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{Var} \left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \right\rangle,$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

(a) Відносно шкали просторів $\{\mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ простір $\mathbb{U}\times\mathbb{Y}$ задовольняє властивість: для будь-якого $\delta \geq 0$ і для кожної пари $(u,y) \in \Xi$ існує пара $(u^*,y^*) \in \Xi$ і послідовність $\{(u_\varepsilon,y_\varepsilon) \in \mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ такі, що

$$\|u-u^*\|_{\mathbb{U}} + \|y-y^*\|_{\mathbb{Y}} \leq \delta \quad \text{i} \quad (u_\varepsilon,y_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (u,y) \quad \text{в} \quad \mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon. \tag{2.3}$$

(aa) Якщо послідовності $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ і $\{(u_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ такі, що $\varepsilon_k \to 0$ при $k\to\infty$, $(u_k,y_k) \in \mathbb{U}_{\varepsilon_k} \times \mathbb{Y}_{\varepsilon_k}$ для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ і $(u_k,y_k) \xrightarrow{\tau} (u,y)$ в $\mathbb{U}_{\varepsilon_k} \times \mathbb{Y}_{\varepsilon_k}$, тоді

$$(u,y)\in\Xi; \quad I(u,y) \leq \liminf_{k\to\infty} I_{\varepsilon_k}(u_k,y_k). \tag{2.4}$$

(aaa) Для кожної пари $(u, y\in\Xi) \subset \mathbb{U}\times\mathbb{Y}$ і будь-якого $\delta>0$ існує стала $\varepsilon^0>0$ і послідовність $\{(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ такі, що

$$(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon,\ \forall\varepsilon\leq\varepsilon^0,\ (u_\varepsilon,y_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\widehat{u},\widehat{y}) \text{ в } \Xi_\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\|u - \widehat{u}\|_{\mathbb{U}} + \|y - \widehat{y}\|_{\mathbb{Y}} \le \delta, \tag{2.6}$$

$$I(u, y) \ge \limsup_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) - \widehat{C}\delta, \tag{2.7}$$

де стала $\widehat{C} > 0$ не залежить від δ.

Тоді має місце такий результат.

Теорема 2.1. *Нехай задача умовної оптимізації*

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_0} I_0(u, y) \right\rangle \tag{2.8}$$

є варіаційною границею послідовності (2.2) *в сенсі означення 2.1. Нехай ця задача має єдиний розв'язок* $(u_0, y_0) \in \Xi_0$ *і нехай для кожного* $\varepsilon > 0$ *пара* $(u^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ *є мінімізантом функціонала* I_ε *на відповідній множині* Ξ_ε. *Якщо послідовність* $\{(u^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ *компактна відносно* τ*-збіжності в* $\{\mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$*, то*

$$(u^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (u^0, y^0) \quad \textit{в} \quad \{\mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \tag{2.9}$$

$$\inf_{(u,y)\in\Xi_0} I_0(u, y) = I_0(u^0, y^0) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(u^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{(u_\varepsilon, y_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon). \tag{2.10}$$

Нехай V — простір Соболєва. Позначимо через $C([0,T], V)$ — банахів простір, який складається із усіх неперервних функцій $u : [0,T] \to V$ та який наділено нормою

$$\|u\|_{C([0,T],V)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_V.$$

Для $1 \le p < \infty$ через $L^p([0,T], V)$ будемо позначати множину всіх вимірних функцій $u : [0,T] \to V$ таких, що

$$\|u\|_{L^p([0,T],V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Зауважимо, що простір $L^2([0,T], V)$ є гільбертовим відносно скалярного добутку

$$(u, v)_{L^2([0,T],V)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V \, dt.$$

3. Постановка задачі оптимального керування

Нехай об'єктом керування виступає така початково-крайова задача

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega \times [0,T] \tag{3.1}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \quad \partial y/\partial \nu_A = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{3.2}$$

$$y(t_0, x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{3.3}$$

де $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ і $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$. Тоді задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таку допустиму пару (u,y), на якій функціонал вартості

$$I(u,y) = \|y - y_d\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \to \inf \tag{3.4}$$

досягав би свого найменшого можливого значення при обмеженнях (3.1)–(3.3).

Введемо поняття слабкого розв'язку для задачі (3.1)–(3.3).

Означення 3.1. Слабким розв'язком задачі (3.1)-(3.3) для фіксованого керування $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ і заданих $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ і $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ будемо називати функцію $y = y(x,t) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, якщо має місце така інтегральна тотожність

$$\int_0^T \int_\Omega y_t \varphi \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y + A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f\varphi \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega u\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt \tag{3.5}$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ і при цьому

$$y(t_0,x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{3.6}$$

Питання про існування слабкого розв'язку крайової задачі (3.1)-(3.3) в сенсі наведеного означення буде розглянуто в наступному параграфі.

Оскільки $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$, то введемо до розгляду таку множину.

Означення 3.2. Будемо казати, що елемент $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ належить до множини D, якщо

$$\left| \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt \right| \le c(y) \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx\, dt \right)^{1/2},$$

для всіх $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$, де $c(y)$ — стала, яка залежить від y.

Далі введемо до розгляду білінійну форму

$$[y,\varphi] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt \ \ \forall y \in D, \forall \varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$$

і означимо білінійну форму $[y,\varphi]$ для всіх $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ за правилом

$$[y,\varphi] = \lim_{\varepsilon\to\infty} [y,\varphi_\varepsilon],$$

де $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ і $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ сильно в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Твердження 3.1. Нехай $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ є довільним допустимим керуванням. Тоді $y \in D$ за умови, що $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ — слабкий розв'язок задачі (3.1)–(3.3) в сенсі означення 3.1.

Доведення. Спочатку перепишемо інтегральну тотожність (3.5) у вигляді

$$[y,\varphi] = -\int_0^T \int_\Omega y_t \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega f\varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega u\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt. \quad (3.7)$$

Застосувавши до (3.7) нерівність Гельдера, теорему Соболєва про сліди, і врахувавши наявність вкладення $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \hookrightarrow L^2(\Gamma_2) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, отримаємо

$$\Big|[y,\varphi]\Big| \le \Big(\|y_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|y\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \\ + \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + C(\Omega,n)\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))}\Big) \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (3.8)$$

□

Зауваження 3.1. В силу твердження 3.1, інтегральну тотожність (3.5) можна переписати наступним чином: y є слабким розв'язком задачі (3.1)–(3.3) тоді і тільки тоді, коли $y \in D$ і має місце рівність

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt + [y,\varphi] = -\int_0^T \int_\Omega y_t \varphi \, dx \, dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega f\varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega u\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt \quad \forall \varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \quad (3.9)$$

Звідси випливає, що $y \in D$ — слабкий розв'язок задачі (3.1)–(3.3) і він задовольняє енергетичну рівність:

$$\|y\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + [y,y] + \frac{1}{2}\|y(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \\ = \int_0^T \int_\Omega fy \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega uy \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.10)$$

В зв'язку з цим введемо таке поняття.

Означення 3.3. Для задачі оптимального керування (3.1)–(3.4) пару (u,y) будемо називати допустимою, якщо $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $y \in D$ і пара (u,y) задовольняє енергетичну рівність (3.10). Надалі Ξ — множина всіх допустимих пар задачі (3.1)-(3.4). В свою чергу, пару $(u_0,y_0) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times D$ будемо називати оптимальною для задачі (3.1)–(3.4), якщо

$$(u_0,y_0) \in \Xi \quad \text{і} \quad I(u_0,y_0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y).$$

Теорема 3.1. *Нехай для задачі* (3.1)–(3.4) *множина* Ξ *є непорожньою. Тоді для кожного* $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *і* $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ *існує єдиний розв'язок* $(u,y) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times D$ *задачі* (3.1)–(3.4).

Доведення. Так як $\Xi \neq \emptyset$ і функціонал (3.4) обмежений знизу на Ξ, то існує мінімізаційна послідовність $\{(u^k,y^k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Xi$ для задачі (3.1)–(3.4) така, що

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k,y_k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \geq 0.$$

Таким чином, $\sup_{k\in\mathbb{N}} I(u^k,y^k) \leq C$ і

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left[\|y^k\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u^k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))}\right] \leq$$

$$\leq 2\|y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + 2\sup_{k\in\mathbb{N}} I(u^k,y^k) \leq 2(1+C).$$

Звідси випливає, що існує підпослідовність $\{(u^k_m,y^k_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{(u^k,y^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ така, що

$$u^k_m \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)),$$

$$y^k_m \rightharpoonup y_0 \quad \text{в } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),$$

$$I(u_0,y_0) < +\infty.$$

Оскільки

$$[y^k,\varphi] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = -\int_0^T \int_\Omega (A\nabla\varphi, \nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = [\varphi, y^k]$$

і $A\varphi \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C^\infty_0(\Omega))$, то можна перейти до границі в (3.5) при $u = u^k$ і $y = y^k$ коли $k \to \infty$. Таким чином, пара (u_0,y_0) задовольняє (3.5), звідси $y_0 \in D$ за твердженням 3.1. Отже, пара (u_0,y_0) є допустимою для задачі (3.1)–(3.4). Використовуючи властивість напівнеперервності знизу функціонала I відносно добутку слабких топологій $L^2(\Gamma_2) \times H^1(\Omega)$, отримаємо

$$0 \leq I(u_0,y_0) \leq \lim_{k\to\infty} I(u_k,y_k) = I_{\min}.$$

Таким чином, пара (u_0,y_0) є оптимальною для задачі (3.1)–(3.4), єдиність якої випливає із строгої опуклості функціонала I на

$$L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^1_0(\Omega)).$$

$\square$

4. Варіаційні розв'язки оптимальної задачі керування

Розглянемо умови, за яких поставлена задача оптимального керування має розв'язки.

Нехай $A \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$. Тоді існує послідовність кососиметричних матриць $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{S}^N)$ така, що

$$A_k \to A \quad \text{сильно в } \; L^2(\Omega; \mathbb{S}^N).$$

Розглянемо послідовність апроксимованих задач оптимального керування, пов'язаних з матрицями A_k

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A_k \nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega \times [0,T], \tag{4.1}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \quad \partial y / \partial \nu_{A_k} = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{4.2}$$

$$y(t_0, x) = y_0 \; \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{4.3}$$

$$I_k(u,y) := I(u,y) \to \inf$$

$$\forall (u,y) \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega)). \tag{4.4}$$

Для подальшого розгляду задач оптимального керування (4.1)–(4.4) спочатку отримаємо оцінки для розв'язків задач (4.1)–(4.3), застосувавши метод Гальоркіна. Для цього введемо послідовність гладких функцій $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ таких, що в просторі $H_0^1(\Omega)$ вони утврюють ортогональний базис, а в просторі $L^2(\Omega)$ — ортонормований. Далі побудуємо послідовність скінчено-вимірних підпросторів $V_m = span\{w_1, ..., w_m\}$ таких, що

$$V_m \subset V_{m+1} \quad \text{і} \quad \overline{\cup V_m} = H_0^1(\Omega).$$

Для фіксованого m покладемо

$$y_m(t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k \quad \text{і} \quad G_m = \sum_{k=1}^m y_{0k}(t) w_k.$$

Тепер розглянемо наступну наближену задачу для $y_m \in H^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\forall s = \overline{1,m}$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T (\dot{y}_m, w_s)_{H_0^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla w_s, \nabla y_m + A_k \nabla y_m)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt = \\ \displaystyle = \int_0^T \int_\Omega f w_s\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega u w_s\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt \\ y_m(0) = G_m \end{cases} \tag{4.5}$$

Для цієї задачі має місце такий результат:

Лема 4.1. *[1] Для будь-якого m існує єдиний розв'язок $y_m \in H^1(0,T; V_m)$ задачі* (4.5). *При цьому $y_m \in C([0,T]; V_m)$.*

Тепер покажемо, що послідовності $\{y_m\}$ і $\{\dot{y}_m\}$ обмежені в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і в $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ відповідно.

Теорема 4.1. *Нехай y_m єдиний розв'язок задачі* (4.5), *тоді для* $\forall t \in [0,T]$ *має місце така оцінка*

$$\|y_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y_m(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \Big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\ +C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}\Big)\big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\ +C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\big) + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.6)$$

Доведення. Помножимо перше рівняння (4.5) на $c_k(t)$ і просумуємо для $k = \overline{1,m}$. В результаті, отримаємо

$$\int_0^T\int_\Omega \dot{y}_m y_m\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega(\nabla y_m, \nabla y_m + A_k\nabla y_m)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = \\ = \int_0^T\int_\Omega f y_m\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega u y_m\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt. \quad (4.7)$$

Застосувавши Remark 7.10 з [1], теорему про сліди в просторах Соболєва і врахувавши те, що $\|G_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ і

$$\int_0^T\int_\Omega(\nabla y_m, A_k\nabla y_m)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = 0,$$

отримаємо

$$\|y_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y_m(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|y_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ \big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\big) + \frac{1}{2}\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.8)$$

Звідки

$$\|y_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y_m(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \Big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\ +C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}\Big)\big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\ +C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\big) + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.9)$$

□

Теорема 4.2. *Нехай y_m — єдиний розв'язок задачі* (4.5), *тоді для* $\forall t \in [0,T]$ *має місце така оцінка*

$$\|\dot{y}_m\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le 2\|y_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 2C_p^2\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \\ + 4C_pC\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C^2\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (4.10)$$

Доведення. Нехай $v \in V$, тоді покладемо $v = w + z$, де $w \in V_m$ і $z \in V_m^{\perp}$. Отже, $\|\nabla w\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Слід відмітити, що рівняння з (4.5) має місце для кожного елементу базису w_s для $s = \overline{1,m}$ тоді і тільки тоді, коли воно має місце для $\forall v \in V_m$. Тепер перепишемо (4.5)

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega \dot{y}_m v\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla v, \nabla y_m + A_k \nabla y_m)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f v\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega uv\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \\ y_m(0) = G_m. \end{cases} \tag{4.11}$$

Далі в задачі (4.11) покладемо $v = w$. В результаті, отримаємо

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{y}_m w\,dx\,dt = -\int_0^T \int_\Omega (\nabla w, \nabla y_m + A_k \nabla y_m)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega f w\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega uw\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt. \tag{4.12}$$

Застосувавши нерівність Шварца-Пуанкаре, теорему про сліди в просторах Соболєва і врахувавши, що

$$\int_\Omega \dot{y}_m w\,dx = \int_\Omega \dot{y}_m v\,dx, \quad \int_0^T \int_\Omega (\nabla w, A_k \nabla y_m)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt,$$

отримаємо

$$\|\dot{y_m}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|y_m\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + C_p\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ + C\|u\|_{L^2(\Gamma_2)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|y_m\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ + C_p\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Gamma_2)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.13}$$

Тепер застосуємо нерівність $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ і проінтегруємо отриманий результат відносно t на інтервалі $(0,T)$

$$\|\dot{y}_m\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le 2\|y_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 2C_p^2\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \\ + 4C_pC\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C^2\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{4.14}$$

□

Таким чином, теореми 4.1 і 4.2 показують, що послідовності наближень Гальоркіна $\{y_m\} \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $\{\dot{y}_m\} \subset L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ обмежені в відповідних просторах, а отже за теоремою Банаха-Алаоглу можна вилучити підпослідовністі $\{y_{m_n}\}$ і $\{\dot{y}_{m_n}\}$ для $n \to \infty$ такі, що

$$y_{m_n} \rightharpoonup y^k \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$\dot{y}_{m_n} \rightharpoonup \dot{y}^k \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

де y^k — розв'язок задачі (4.1)–(4.3), для якого має місце результат.

Теорема 4.3. *[1] Нехай $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Тоді для $\forall A_k \in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^N)$ елемент $y^k \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ — єдиний розв'язок задачі* (4.1)–(4.3). *Крім того, мають місце оцінки:*

$$\|y^k\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y^k(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \Big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\ + C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}\Big)\Big(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \\ + C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\Big) + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.15)$$

$$\|\dot{y}^k\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le 2\|y^k\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 2C_p^2\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \\ + 4C_pC\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C^2\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (4.16)$$

Як наслідок отримаємо результат, який стосується слабкого розв'язку задачі (3.1)–(3.3)

Твердження 4.1. Нехай $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ і $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$. Нехай для $\forall k \in \mathbb{N}$ y^k — відповідні розв'язки задач (4.1)–(4.3). Тоді

(i) $y^k \rightharpoonup y^*$ слабо в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,

(ii) $\dot{y}^k \rightharpoonup \dot{y}^*$ слабо в $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

де y^* — слабкий розв'язок задачі (3.1)–(3.3). Крім того, має місце нерівність:

$$[y^*, y^*] \ge 0.$$

Доведення. Так як y^k — слабкий розв'язок задачі (4.1)-(4.3), то має місце інтегральна тотожність

$$\int_0^T\int_\Omega y_t^k\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega(\nabla\varphi, \nabla y^k + A_k\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = \\ = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega u\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt \quad (4.17)$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$. Враховуючи той факт, що

$$\int_\Omega(\nabla v, \nabla v + A_k\nabla v)_{\mathbb{R}^N}\,dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

отримаємо

$$\int_0^T\int_\Omega y_t^k y^k\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega(\nabla y^k, \nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = \\ = \int_0^T\int_\Omega f y^k\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega u y^k\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt, \quad (4.18)$$

або

$$\|y^k\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y^k(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_0^T \int_\Omega f y^k\, dx\, dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega u y^k\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt + \frac{1}{2}\|y_0(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \quad (4.19)$$

З теореми 4.3 випливає, що $\{y^k\}$ і $\{\dot{y}^k\}$ обмежені в просторах $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ і $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ відповідно. Отже, існує елемент $y^* \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ такий, що

$$y^k \rightharpoonup y^* \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),$$
$$\dot{y}^k \rightharpoonup \dot{y}^* \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Таким чином

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y^*)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt$$

і

$$\int_0^T \int_\Omega y^k_t \varphi\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega y^*_t \varphi\, dx\, dt$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C^\infty_0(\Omega))$. Далі розглянемо

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y^* - A_k\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt \le \left|\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y^* \pm A\nabla y^k - \right. \\ \left. - A_k\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt\right| \le \left|\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y^* - A\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt\right| + \\ + \left|\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y^k - A_k\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt\right| \le \left|\int_0^T \int_\Omega (A\nabla\varphi, \nabla y^* - \nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt\right| + \\ + \|A - A_k\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)} \int_0^T \|y^k\|_{H^1_0(\Omega)} \|\varphi\|_{C^\infty_0(\Omega)}\, dt \le \\ \le \left|\int_0^T \int_\Omega (A\nabla\varphi, \nabla y^*)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega (A\nabla\varphi, \nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt\right| + \\ + \|A - A_k\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|y^k\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \|\varphi\|_{C^\infty(0,T;C^\infty_0(\Omega))} \to 0. \quad (4.20)$$

Таким чином $A_k\nabla y^k \overset{*}{\rightharpoonup} A\nabla y^*$ $*$-слабо в $L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, а отже можна перейти до границі в (4.17). В результаті отримаємо

$$\int_0^T \int_\Omega y^*_t \varphi\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y^* + A_k\nabla y^*)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f\varphi\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega u\varphi\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt. \quad (4.21)$$

Звідси випливає, що y^* — слабкий розв'язок задачі (3.1)–(3.3) і $y^* \in D$. Оскільки $\nabla y^k \rightharpoonup \nabla y^*$ в $L^2(\Omega)$, то перейшовши до границі в (4.18) і застосувавши властивість напівнеперервності знизу норми $\|\cdot\|^2_{H^1(\Omega)}$, отримаємо

$$\|y^*\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y^*(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \\ \leq \int_0^T \int_\Omega f y^* \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega u y^* \, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \quad (4.22)$$

Так як y^* — слабкий розв'язок задачі (3.1)–(3.3), то y^* задовольняє (3.10), а отже з (4.22) випливає, що $[y^*, y^*] \geq 0$. □

Тепер розглянемо задачу оптимального керування (4.1)–(4.4).

Твердження 4.2. Нехай $y_d \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ і $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ задано. Тоді для $\forall k \in \mathbb{N}$ існує єдина оптимальна пара $(u_0^k, y_0^k) \in \Xi_k$ для відповідної задачі (4.1)–(4.3) така, що послідовність пар $\{(u_0^k, y_0^k) \in \Xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ відносно компактна в добутку слабких топологій на $L^2(\Gamma_2) \times H^1_0(\Omega)$, тобто

$$y_0^k \rightharpoonup y^* \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),\ u_0^k \rightharpoonup u^* \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)),$$

де $(u^*, y^*) \in \Xi$.

Доведення. Спочатку покажемо, що для послідовності задач (4.4) виконується умова $\sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{(u,y)\in\Xi} I_k(u,y) \leq C$. Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$ білінійна форма $[y,\varphi]_k$ обмежена в $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ і має місце рівність

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla y^k, A\nabla y^k)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt = 0,$$

то за лемою Лакса-Мільграма задача (4.1)–(4.3) має єдиний розв'язок для кожного $y^k \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. Враховуючи те, що функціонал I_k строго опуклий і застосувавши властивість напівнеперервності, отримаємо, що задача (4.1)-(4.4) допускає єдиний єдиний розв'язок

$$I_k(u_0^k, y_0^k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I_k(u,y), \quad (u_0^k, y_0^k) \in \Xi.$$

З теореми (4.3) випливає, що послідовність $\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ для фіксованого $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ буде обмеженою і має місце оцінка (4.15), де сталі C і C_1 не залежать від A_k. В результаті

$$I_k(u_0^k, y_0^k) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I_k(u,y) \leq I_k(u, y^k) \leq 2\|y_d\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \\ + 2\left(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|_{H^1_0(\Omega)}\right) \\ \left(C_1\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right) + \|y_0\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \quad (4.23)$$

Таким чином

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\|y_0^k\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\|u_0^k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)<+\infty,$$

а, отже, послідовність пар $\{(u_0^k,y_0^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ слабо збігається, тобто

$$y_0^k\rightharpoonup y^* \text{ в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ і } u_0^k\rightharpoonup u^* \text{ в } L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)).$$

Врахувавши результати отримані в твердженні 4.1 і перейшовши до границі в (4.18) з $u=u_0^k$, приходимо до висновку, що пара (u^*,y^*) пов'язана інтегральною тотожністю (3.5), де y^* — слабкий розв'язок задачі (3.1)–(3.3) для $u=u^*$ і $y^*\in D$. Отже, $(u^*,y^*)\in\Xi$. □

З наведених результатів випливає, що для будь-якого наближення $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^N)$ матриці $A\in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ з властивістю $A_k\to A$ в $L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$, оптимальний розв'язок задачі оптимального керування (4.1)–(4.4) завжди дає в границі деякий допустимий, проте не обов'язково оптимальний, розв'язок (u^*,y^*) задачі оптимального керування (3.1)–(3.4), який може залежати від вибору $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Таким чином, виникає питання щодо досяжності оптимальних розв'язків задачі (3.1)–(3.4) і структури множини всіх досяжних розв'язків. В зв'язку з цим далі наведемо поняття і результати, які стосуються умов досяжності оптимальних розв'язків задачі (3.1)-(3.4).

Зауваження 4.1. Надалі наближення $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^N)$ матриці $A\in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ з властивістю $A_k\to A$ сильно в $L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ будемо називати L^∞-апроксимацією матриці A.

Означення 4.1. Пару $(u^*,y^*)\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ називатимемо варіаційним розв'язком задачі оптимального керування (3.1)–(3.4), якщо існує L^∞-апроксимація матриці A така, що

$$I(u^*,y^*)=\inf_{(u,y)\in\Xi}I(u,y),\quad (u^*,y^*)\in\Xi, \tag{4.24}$$

де $y_0^k\to y^*$ в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $u_0^k\to u^*$ в $L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, і

$$\left\langle\inf_{(u,y)\in\Xi_k}I_k(u,y)\right\rangle\xrightarrow{Var}\left\langle\inf_{(u,y)\in\Xi}I(u,y)\right\rangle \text{ при } k\to\infty. \tag{4.25}$$

Твердження 4.3. Нехай $(u^*,y^*)\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ — варіаційний розв'язок задачі оптимального керування (3.1)-(3.4). Тоді $[y^*,y^*]=0$.

Доведення. Із теореми 2.1 і апріорних оцінок (4.15), (4.23) випливає, що

$$y_0^k\rightharpoonup y^* \text{ в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ і } u_0^k\rightharpoonup u^* \text{ в } L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)), \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = I(u^*,y^*) := \|y^*-y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u^*\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \\ = \lim_{k\to\infty} \inf_{(u^k,y^k)\in\Xi_k} I_k(u^k,y^k) = \lim_{k\to\infty} I_k(u^k_0,y^k_0) = \\ = \lim_{k\to\infty}\left[\|y^k_0-y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u^k_0\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right]. \quad (4.27)\end{aligned}$$

Таким чином, (4.15) є наслідком (4.26) і (4.27). Врахувавши той факт, що

$$\int_0^T\int_\Omega (\nabla y^k_0, A\nabla y^k_0)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt = 0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned}0 = \lim_{k\to\infty}[y^k_0,y^k_0] = -\lim_{k\to\infty}\|y^k_0\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\|y^k_0(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \\ + \lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega f y^k_0\,dx\,dt + \lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega u y^k_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt + \frac{1}{2}\|y_0(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \\ = -\|y^*\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} - \frac{1}{2}\|y^*(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \\ + \int_0^T\int_\Omega f y^*\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega u y^*\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H^1_0(\Omega)} = [y^*,y^*]. \quad (4.28)\end{aligned}$$

□

Тепер наведемо умови, які гарантують існування варіаційного розв'язку задачі оптимального керування (3.1)–(3.4).

Теорема 4.4. *Нехай матриця $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ є такою, що*

$$[y,y] = 0 \quad \forall y \in D. \quad (4.29)$$

Тоді єдиний розв'язок (u_0,y_0) задачі оптимального керування (3.1)-(3.4) *є варіаційним.*

Доведення. Нехай задано L^∞-апроксимацію матриці $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$. Далі розглянемо послідовність пар $\{(u^k,y^k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, яка наділена наступними властивостями:

(i) $\{(u^k,y^k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Xi_{n_k}$, де $\{(n_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \to \infty$ коли $k\to\infty$,

(ii) $y^k \rightharpoonup y$ в $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ і $u^k \rightharpoonup u$ в $L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$.

З твердження 4.2 випливає, що гранична пара (u,y) є допустимою для вихідної задачі (3.1)–(3.4), а отже ця задача має єдиний оптимальний розв'язок $(u_0,y_0)\in\Xi$ за теоремою 3.1. Далі покажемо, що задача оптимального керування (3.1)–(3.4) є варіаційною границею послідовності задач (4.1)–(4.4). Для цього потрібно перевірити виконання умов означення 2.1.

Умова (a) є очевидною для простору $L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ для $\delta>0$. В свою чергу умова (aa) випливає з нерівності

$$\liminf_{k\to\infty} I_k(u^k,y^k)=$$

$$=\liminf_{k\to\infty}\left[\|y^k-y_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\|u^k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right]\geq I(u,y),$$

яка має місце для будь-якої послідовності

$$\{(u^k,y^k)\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

з властивостями (i)–(ii).

Тепер перевіримо умову (aaa) означення 2.1. Отже, нехай (u^*,y^*) довільна допустима пара вихідної задачі і нехай $\{\widehat{u}^k\}_{k\in\mathbb{N}}\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ послідовність керувань таких, що

$$\widehat{u}^k\to u^* \text{ сильно в } L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)). \tag{4.30}$$

Нехай $\{\widehat{y}^k=\widehat{y}^k(u^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ відповідні розв'язки задачі оптимального керування (4.1)–(4.3). Тоді з твердження 4.2 випливає, що послідовність $\{\widehat{y}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ рівномірно обмежена в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і існує елемент $\widehat{y}\in D$ такий, що $(u^*,\widehat{y})\in\Xi$ і $\widehat{y}^k\rightharpoonup\widehat{y}$ в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Тепер покажемо, що $\widehat{y}=y^*$ і має місце тотожність

$$I(u^*,y^*)=\limsup_{k\to\infty} I_k(\widehat{u}^k,\widehat{y}^k). \tag{4.31}$$

Оскільки $(u^*,y^*)\in\Xi$ і $(u^*,\widehat{y})\in\Xi$, то $y=y^*-\widehat{y}$ — розв'язок однорідної задачі

$$y_t-div(\nabla y+A(x)\nabla y)=0 \quad \text{на} \quad \Omega\times[0,T],$$

$$y=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\times[0,T], \quad \partial y/\partial\nu_A=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2\times[0,T],$$

$$y(t_0,x)=y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Слід відмітити, що ця задача має лише тривіальні розв'язки, так як

$$\int_0^T\int_\Omega y_t y\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega(\nabla y,\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt=-[y,y]=0.$$

Отже, $y^*=\widehat{y}$. Нерівність (4.31) випливає з (4.30) і з енергетичних оцінок (4.18), (3.10). $\square$

Бібліографічні посилання

1. *Salsa S.* Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory / S. Salsa. — Milan: Springer-Verlag, 2008.
2. *V.V. Zhikov* Remarks on the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with lower-order terms / V.V. Zhikov — Functional Analysis and Its Applications, 38(2004), No. 3, 173-183.
3. *Когут, П.І.* Оптимімізація в нелінійних еліптичних крайових задачах / П.І. Когут, О.А. Рядно, О.П. Когут. — Дніпропетровськ: ДДФА, 2010.

Надійшла до редколегії 04.03.2013