УДК 517.5

А. В. Довженко, П. І. Когут

Epi —НАПІВНЕПЕРЕРВНІ ЗНИЗУ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

A. V. Dovzhenko, P. I. Kogut **Epi**-*lower semicontinuous mappings and their properties*, Matematychni Studii, **?** (2009) ?–?.

We present a new concept of lower semicontinuity for vector-valued mappings, so-called lower epi-semicontinuity, which is closely related with the sequential closedness of epigraphs of these mappings. We consider the case when the mappings take values in a real Banach space Y partially ordered by a closed convex pointed cone Λ, and we make no additional assumptions on topological interior of the ordering cone. We also study the comparison of the lower epi-semicontinuity with the classical notion of lower semicontinuity and its generalizations.

А. В. Довженко, П. І. Когут **Epi**-*полунепрерывные снизу отображения и их свойства* // Математичні Студії. – 2009. – Т.?, №?. – С.?–?.

Пусть f — векторнозначное отображение, действующее в полуупорядоченное замкнутым выпуклым заостреным конусом Λ действительное банахово пространство $Y^{\bullet}$. Для таких отображений вводится понятие epi-полунепрерывности снизу (epi-пн.сн.). Изучены свойства epi-пн.сн. отображений и их взаимосвязь с классом отображений, имеющих секвенциально замкнутый надграфик. Установлены соотношения между существующими концепциями полунепрерывности снизу.

Вступ

Одним із найбільш відомих результатів класичного аналізу, який тісно пов'язаний з двадцятою проблемою Гільберта щодо існування розв'язків задач варіаційного числення, є наступний: нехай (X,τ) — топологічний простір, який задовольняє першу аксіому зліченності, $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ — довільна функція. Тоді є еквівалентними наступні твердження:

(i) для довільного $x \in X$ і довільної послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка τ-збігається до x при $n\to\infty$, справедливо $f(x) \le \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) := \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{i\ge n} f(x_i)$;

(ii) надграфік функції f, тобто множина epi $= \{(x,\lambda)\in X\times\mathbb{R} \;:\; \lambda \ge f(x)\}$, є замкненим в просторі $X\times\mathbb{R}$.

Власне, кожне з цих тверджень може виступати як самостійне означення такого поняття як напівнеперервність знизу функції $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Проблема, яка розглядається в даній роботі, безпосередньо пов'язана з узагальненням даного результату на випадок, коли f є відображенням простору X в частково

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46B40, 46A30.

упорядкований за деяким конусом Λ нормований простір Y. Відомо, що класична концепція напівнеперервності знизу (див. пункт (i)) має декілька, загалом незалежних, узагальнень на векторнозначний випадок. Зокрема, це такі поняття як напівнеперервність знизу за конусом, квазі-напівнеперервність знизу, порядкова напівнеперервність, Λ-напівнеперервність знизу та інші (див., напр., [5, 7, 9, 10]). Кожна з таких характеристик, відіграє вагому роль в питаннях розв'язності відповідних задач векторної оптимізації. Проте, що стосується їх зв'язку з замкненістю надграфіка відповідного відображення, то в загальному випадку, такої еквівалентності не має, оскільки операція замикання надграфіка відображень типу $f : X \to Y$ може породжувати множину, яка вже не є надграфіком для жодного відображення. Загалом, має місце наступна діаграма:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{нн.зн.}} \arrow[r] & \boxed{\text{замкненість надграфіка}} \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \boxed{\text{кв.-нн.зн.}} \arrow[l, shift left, "\operatorname{int}\Lambda \neq \varnothing"] \\
& \boxed{\Lambda\text{-нн.зн.}} &
\end{tikzcd}
$$

Як видно з наведеної діаграми, квазі-напівнеперервність знизу гарантує замкненість відповідного надграфіка лише за умови, коли внутрішність конуса, який задає частковий порядок, є непорожньою. Проте, ця умова є досить обмежливою, особливо для випадку нескінченно вимірних просторів Y. Наприклад, якщо $Y = L^p(\Omega)$, де $p \in [1, \infty)$, а Λ є конусом додатних елементів в $L^p(\Omega)$, то $\operatorname{int}\Lambda = \varnothing$. В зв'язку з цим дана робота ставить за мету ввести нову концепцію напівнеперервності знизу для векторнозначних відображень, яка була б узгодженою з замкненістю надграфіків таких відображень і була вільною від припущення $\operatorname{int}\Lambda \neq \varnothing$. Такі відображення в роботі названі ері-напівнеперервними знизу. Окреслено клас таких відображень, досліджено основні їх властивості та наведено порівняльний аналіз з іншими класами напівнеперервних знизу відображень. Всі базові положення ілюстровано модельними прикладами.

1 Основні поняття та попередні результати.

Нехай X та Y — пара дійсних нормованих просторів. Нехай Y є топологічно двоїстим простором до сепарабельного нормованого простору V. Наділимо простір X топологією норми $\|\cdot\|_X$, а простір Y *-слабкою топологією $\tau = \sigma(Y; V)$, відповідно. Як відомо, топологія норми $\|\cdot\|_Y$ в Y не є узгодженою з двоїстістю. Отже, замкнена опукла множина в Y є, в загальному випадку, незамкненою в *-слабкій топології. Для довільної підмножини A простору Y через $\operatorname{int}_\tau A$ та $\operatorname{cl}_\tau A$ будемо позначати її внутрішність та замикання відносно τ-топології, відповідно. Будемо казати, що послідовність пар $\{(x_n, y_n)\}_n \subset X \times Y$ μ-збігається в $X \times Y$ до пари (x_0, y_0), якщо $x_n \to x_0$ сильно в X, $y_n \xrightarrow{\tau} y_0$ в Y.

Означення 1. *Множину $A \subset X \times Y^\bullet$ будемо називати секвенціально μ-замкненою, якщо для довільної послідовності її елементів $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ всі її часткові границі також належать A.*

Нехай Λ — опуклий τ-замкнений загострений конус в Y. Загостреність конуса означає, що $\Lambda + (-\Lambda) = \{0_Y\}$. Надалі вважатимемо, що простір Y є частково впорядкованим за конусом Λ. При цьому відношення часткового порядку, яке породжене конусом Λ, будемо позначати як $\preceq_\Lambda$. Отже, елементи y, z простору Y знаходяться у відношенні $y \preceq_\Lambda z$, якщо $z \in y + \Lambda$.

Означення 2. *Елемент $z \in Y$ називаеться точною нижньою гранню множини $A \subset Y$ (далі $z = \inf_\Lambda A$), якщо: 1) $z \preceq_\Lambda y$, $\forall y \in A$; 2) з того, що $w \preceq_\Lambda y$ для деякого $w \in Y$ та $\forall y \in A$, випливає: $w \preceq_\Lambda z$. Елемент $z \in Y$ називаеться Λ-мінімальним елементом множини $A \subset Y$, якщо $(z - \Lambda) \cap A = z$.*

Зауважимо, що, на відміну від скалярного випадку, в частково впорядкованих просторах точна нижня грань множини може не належати її замиканню в обраній топології. Дійсно, нехай $Y = \mathbb{R}^2$ і $\Lambda = \mathbb{R}^2_+$ — конус додатних елементів в $\mathbb{R}^2$. Нехай $A = \{(0, 2), (2, 0)\}$. Тоді, легко бачити, що $\inf_{\mathbb{R}^2_+} A = (0, 0)$.

Означення 3. *Будемо казати, що множина $A \subset Y$ обмежена зверху (знизу) за конусом Λ, якщо існує елемент $b \in Y$ такий, що $a \preceq_\Lambda b$, $\forall a \in A$ ($a \succeq_\Lambda b$, $\forall a \in A$).*

Означення 4. *[4] Множина всіх Λ-мінімальних елементів множини $A \in Y$ називаеться ефективним Λ-мінімумом множини A і позначаеться як $\Lambda - \mathrm{Min}\, A$.*

Позначимо через $\{-\infty_\Lambda\}$ та $\{+\infty_\Lambda\}$ пару невласних елементів простору Y, які задовольняють умову: $-\infty_\Lambda \preceq_\Lambda y \preceq_\Lambda +\infty_\Lambda$, $\forall y \in Y$. Надалі вважатимемо, що $(+\infty_\Lambda) + (-\infty_\Lambda) = 0_Y$. Нехай $Y^\bullet$ — напіврозширений простір $Y \cup \{+\infty_\Lambda\}$. Тоді $Y^\bullet$ залишаеться нормованим простором, якщо покласти $\|+\infty_\Lambda\|_Y = +\infty$ та $y + \alpha(+\infty_\Lambda) = +\infty_\Lambda$, $\forall y \in Y$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$.

Якщо множина $A \subset Y$ не є обмеженою знизу за конусом, то будемо вважати, що $\inf_\Lambda A = -\infty_\Lambda$.

Означення 5. *Будемо казати, що послідовність $\{y_n\}_{y \in \mathbb{N}}$ з простору Y τ-збігаеться до елемента $\{-\infty_\Lambda\}$, якщо $\inf_\Lambda \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = -\infty_\Lambda$.*

Суттєвим розширенням поняття ефективного Λ-мінімума є наступна концепція:

Означення 6. *[4] Ефективним Λ_τ-мінімумом множини $A \subset Y$ називаеться множина Λ-мінімальних елементів замикання множини A в топології τ, у разі коли вона не є порожньою, і $\{-\infty_\Lambda\}$ в іншому випадку:*

$$\Lambda_\tau - \mathrm{Min}\, A = \begin{cases} \Lambda - \mathrm{Min}\,(\mathrm{cl}_\tau A), & \Lambda - \mathrm{Min}\,(\mathrm{cl}_\tau A) \neq \varnothing \\ \{-\infty_\Lambda\}, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{1}$$

Нехай X_∂ — непорожня підмножина простору X, а $f : X_\partial \to Y$ — довільне відображення. Нехай $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність в просторі Y. Множину всіх її часткових границь в τ-топології простору Y будемо позначати через $L^\tau\{y_n\}$. Отже, якщо $y \in L^\tau\{y_n\}$, то існує підпослідовність $\{y_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{y_n\}_n$ така, що $y_{n_i} \xrightarrow{\tau} y$ в Y при $i \to \infty$.

Для довільного $f : X_\partial \to Y$ та фіксованої точки $x_0 \in X_\partial$ введемо до розгляду множину:

$$L^\mu(f, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}(x_0)} L^\tau\{f(x_k)\}, \tag{2}$$

де через $\mathfrak{M}(x_0)$ позначено сукупність всіх послідовностей $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X_\partial$, які сильно збігаються до x_0 в просторі X.

Як випливає з наведених вище означень, для відображення f, яке необмежене знизу за конусом в околі деякої точки x_0, множина $L^\mu(f, x_0)$ містить невласний елемент $\{-\infty_\Lambda\}$. Надалі будь-яке відображення $f : X_\partial \to Y$ будемо пов'язувати з його розширенням $\widehat{f} : X \to Y^\bullet$ на весь простір X за правилом

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_\partial, \\ +\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases}$$

Означення 7. *Будемо казати, що відображення $f : X \to Y^\bullet$ є обмеженим знизу (зверху) в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ відповідна послідовність значень $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ є обмеженою знизу(зверху) за конусом.*

2 Властивість напівнеперервності та її узагальнення

В цьому параграфі наведемо короткий огляд найбільш відомих понять та результатів, які пов'язані з узагальненням концепції напівнеперервності знизу (нн.зн.) для векторнозначних відображень $f : X \to Y^\bullet$. Нехай $f : X \to Y^\bullet$ — довільне відображення. Пов'яжемо з ним його надграфік

$$\mathrm{epi} f := \{(x, y) \in X \times Y^\bullet \,|\, f(x) \preceq_\Lambda y\}. \tag{3}$$

Як відомо, концепція напівнеперервності знизу скалярних функцій тісно пов'язана з властивістю замкнености їх надграфіків, а саме функція $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ є нн.зн. тоді і тільки тоді, коли її надграфік є замкненою множиною. Проте, подібне твердження для випадку векторнозначних відображень $f : X \to Y^\bullet$ є, загалом, хибним. Більше того, узагальнення концепції напівнеперервності знизу на випадок відображень, які діють в частково упорядковані векторні простори, є неоднозначним. До найбільш відомих таких узагальнень можна віднести наступні:

Означення 8. *[9] Відображення $f : X \to Y^\bullet$ називається секвенціально напівнеперервним знизу (ск.нн.зн.) в точці $x_0 \in X$, якщо для довільного $y \preceq_\Lambda f(x_0)$ та для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, яка сильно збігається до x_0, існує τ-збіжна до y послідовність $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ така, що $y_k \preceq_\Lambda f(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}$.*

Означення 9. *[5] Відображення $f : X \to Y^\bullet$ називається квазі-напівнеперервним знизу (кв.-нн.зн.) в точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $b \in Y$ такого, що $b \npreceq_\Lambda f(x_0)$, існує такий окіл $\mathfrak{O}(x_0)$ елемента x_0 в сильній топології простору X, в якому $b \npreceq_\Lambda f(x)\ \forall x \in \mathfrak{O}(x_0)$.*

Означення 10. *[4] Відображення $f : X \to Y^\bullet$ називається Λ_τ-напівнеперервним знизу в точці x_0 (відносно сильної топології простору X), якщо $f(x_0) \in \Lambda_\tau - \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тут через $\Lambda_\tau - \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ позначено Λ_τ-нижню границю відображення $f : X \to Y^\bullet$ в точці $x_0 \in X$, яка визначається за правилом*

$$\Lambda_\tau - \liminf_{x\to x_0} f(x) := \begin{cases} \mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0), & \mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) \neq \varnothing, \\ \Lambda_\tau - \mathrm{Min}\,\mathrm{L}^\mu(f, x_0), & \mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) = \varnothing, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) := \{y^* \in \mathrm{L}^\mu(f, x_0) : (y^* - \Lambda) \cap f(X) \in \{\varnothing, y^*\}\}. \tag{5}$$

Надалі будемо опускати індекс τ в означенні Λ-нн.зн., маючи на увазі *-слабку топологію простору Y.

Означення 11. *Відображення $f : X \to Y^\bullet$ називаєтьcя ск.нн.зн. (відповідно, кв.-нн.зн. та Λ-нн.зн.) на X, якщо f ск.нн.зн. (відповідно, кв.-нн.зн. та Λ-нн.зн.) в кожній точці простору X.*

Наведемо перелік найбільш вагомих результатів, які стосуються означених вище понять (див., напр., [4], [8], [10]).

1. Якщо $Y = \mathbb{R}$ і $\Lambda = \mathbb{R}_{\geq}$, то поняття ск.нн.зн., кв.-нн.зн. та Λ-нн.зн. тотожні класичному означенню напівнеперервності знизу для скалярних функцій $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$;
2. Якщо відображення $f : X \to Y^\bullet$ — ск.нн.зн. в точці $x_0 \in X$, то воно є квазі-нн.зн. в цій точці;
3. Якщо відображення f ск.нн.зн. в точці $x_0 \in X$, то воно є Λ-нн.зн. в x_0;
4. Властивості Λ- та квазі-напівнеперервності знизу в точці $x_0 \in X$ для відображення f не гарантують його секвенціальну напівнеперервність знизу в цій точці;
5. Відображення f є кв.-нн.зн. тоді і тільки тоді коли для кожного $b \in Y$ множина $\{x \in X : f(x) \leq b\}$ є сильно замкненою в X;
6. Надграфік секвенціально напівнеперервного знизу відображення f є секвенціально μ-замкненим, проте обернене твердження, в загальному випадку, є хибним;
7. Якщо надграфік epi$f$ відображення $f : X \to Y^\bullet$ є секвенціально μ-замкненим, то f — кв.-нн.зн. відображення, проте обернене твердження справедливе лише за умови, коли конус Λ має непорожню внутрішність.

Таким чином, для довільного відображення f мають місце наступні співвідношення між наведеними концепціями секвенціальної напівнеперервності знизу та властивістю секвенціальної μ-замкненості його надграфіка: "Λ-нн.зн." $\leftarrow$ "ск.нн.зн." $\rightarrow$ "секвенціальна μ-замкненість надграфіка" $\overset{\operatorname{int}\Lambda\neq\varnothing}{\leftrightarrows}$ "кв.-нн.зн." .

Для ілюстрації твердження з пункту 7, наведемо приклад квазі-напівнеперервного знизу відображення, надграфік якого не є замкненим.

Приклад 1. *Нехай гільбертів простір l_2^* частково упорядковано за конусом невід'ємних елементів $\Lambda = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2^* | \, x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}$. Легко бачити, що конус Λ має порожню внутрішність як в сильній, так і в *-слабкій топології простору l_2^*. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to l_2^*$, яке задане правилом*

$$f(x) = \begin{cases} 0_{l_2^*}, & |x| \geq 1, \\ (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots) & \frac{1}{2n+1} \leq |x| \leq \frac{1}{2n}, \; n \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right), & x = 0, \\ +\infty_\Lambda, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки властивість кв.нн. знизу для f у точках $x \neq 0$ є очевидною, то розглянемо випадок, коли $x = 0$. Покажемо, що в цьому випадку для довільного $b \not\geq_\Lambda f(0) =$

$\left(\frac{1}{2},0,0,\ldots\right)$ *існує окіл точки 0:* $\mathfrak{O}_n(0)=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, *на якому* $b\not\succeq_\Lambda f(\mathfrak{O}_n(0))$. *Дійсно, припустивши обернене, для довільного номера* $n_0\in\mathbb{N}$ *знайдеться елемент* $y_0\in\left(-\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0}\right)$ *такий, що* $b\succeq_\Lambda f(y_0)$. *За побудовою маємо:* $f(y_0)=(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n(y_0)},0,\ldots)$. *Тоді знайдеться окіл* $\mathfrak{O}_{n_1}(0)=\left(-\frac{1}{n(y_0)+1},\frac{1}{n(y_0)+1}\right)$ *такий, що* $(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n(y_0)},0,\ldots)\notin f(\mathfrak{O}_{n_1}(0))$. *Отже в цьому околі повинна існувати точка* y_1 *така, що* $f(y_1)=(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n(y_1)},0,\ldots)\preceq_\Lambda b$, *де* $n(y_1)>n(y_0)$. *Продовжуючи цей процес, приходимо до наступної послідовності елементів простору* l_2^*:

$$\left\{(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n(y_i)},0,\ldots)\right\}_{i=0,1,\ldots} \quad \text{де} \;\; n(y_i)\to\infty \;\text{при}\; i\to\infty. \tag{7}$$

Оскільки елемент $b\in l_2^*$ *повинен бути більшим за конусом* Λ *аніж усі елементи цієї послідовності, то це означає, що компоненти вектора* $b=(b_0,b_1,b_2,\ldots)$ *є невід'ємними числами та такими, що*

$$b_{n(y_i)}\geq 1,\;\forall i\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Об'єднуючи (7) та (8), отримуємо $\limsup\limits_{k\to\infty} b_k^2\geq 1$, *що означає: ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2$ *є розбіжним. Отже, елемент* b *не належить простору* l_2^*, *тобто вихідне припущення було хибним. Таким чином, відображення* f *є кв.-нн.зн. на* $\mathbb{R}$.

Тепер покажемо, що надграфік відображення f *не є секвенціально* μ*-замкненим в сенсі означення 1. Для цього розглянемо послідовність* $\left\{\left(\frac{1}{2n},f\left(\frac{1}{2n}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset \operatorname{epi} f$. *Оскільки*

$$\frac{1}{2n}\to 0 \;\text{при}\;\; n\to+\infty, \quad f\left(\frac{1}{2n}\right)=(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n},0,\ldots)\xrightarrow{\tau} 0_{l_2^*} \;\text{при}\;\; n\to+\infty,$$

то пара $\left(0,0_{l_2^*}\right)\in\mathbb{R}\times l_2^*$ *є* μ*-границею означеної послідовності. Проте* $0_{l_2^*}\not\succeq_\Lambda f(0)=\left(\frac{1}{2},0,0,\ldots\right)$. *Отже,* $\left(0,0_{l_2^*}\right)$ *не належить надграфіку відображення* f, *що і потрібно було встановити.*

Зауваження. Відображення f, яке задане правилом (6), не є Λ-нн.зн. в точці 0. Дійсно, виходячи з означення нижньої границі (див. (4)), маємо $\Lambda_\tau-\liminf\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{0_{l_2^*}\right\}$. Проте, $f(0)=\left(\frac{1}{2},0,0,\ldots\right)$. Таким чином, властивість квазі-напівнеперервності знизу для відображення f ще не гарантує його Λ-напівнеперервності знизу в цій точці.

3 Поняття epi-напівнеперервності знизу

Нехай $f: X\to Y^\bullet$ — довільне відображення, і нехай простори X та Y наділені, відповідно, сильною та *-слабкою топологіями. Беручи до уваги означення 2 та конструкцію (2), введемо до розгляду наступне поняття:

Означення 12. *Відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ будемо називати* epi-*напівнеперервним знизу (*epi-*нн.зн.) в точці $x_0 \in X$, якщо*

$$f(x_0) = \inf\nolimits_{\Lambda} L^{\mu}(f, x_0). \tag{9}$$

У випадку, коли співвідношення (9) виконується в усіх точках x_0 простору X, будемо казати, що відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ є epi-*нн.зн. на X.*

Зауваження. Нехай $Y = \mathbb{R}$ і $\Lambda = \mathbb{R}_{\geq}$. Тоді з (9) маємо

$$\inf\nolimits_{\Lambda} L^{\mu}(f, x_0) = \liminf_{x \to x_0} f(x). \tag{10}$$

Отже, в скалярному випадку поняття epi-нн.зн. еквівалентне поняттю класичної секвенціальної напівнеперервності знизу. Таким чином, внаслідок зазначених вище властивостей, усі чотири наведених в роботі концепції напівнеперервності знизу (ск.нн.зн., кв.-нн.зн., Λ-нн.зн., та epi-нн.зн.) збігаються у скалярному випадку.

До характерних властивостей epi-нн.зн. відображень варто віднести наступні (див теореми 1 та 2), які не мають свого прямого аналогу для відображень іншого типу.

Теорема 1. *Нехай $f : X \to Y^{\bullet}$ — довільне відображення, надграфік якого* epi*f є секвенціально μ-замкненою підмножиною в $X \times Y$. Тоді $f : X \to Y^{\bullet}$ —* epi-*нн.зн. на X.*

Доведення. Припустимо обернене. Тоді знайдеться точка $x_0 \in X$ така, що

$$f(x_0) \neq \inf\nolimits_{\Lambda} L^{\mu}(f, x_0). \tag{11}$$

Це означає, що можна вказати послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, для якої справедливо наступне:

$$x_n \to x_0, \quad f(x_n) \xrightarrow{\tau} f^*, \quad f^* \not\preceq_{\Lambda} f(x_0). \tag{12}$$

За побудовою маємо: $(x_n, f(x_n)) \in \operatorname{epi} f$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. При цьому $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{\mu} (x_0, f^*)$. Проте, як випливає з (12), $(x_0, f^*) \notin \operatorname{epi} f$, що суперечить μ-замкненості надграфіка. Отже, зроблене припущення було хибним, що і доводить теорему. □

Введемо ряд допоміжних понять.

Означення 13. *Відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ будемо називати локально обмеженим знизу за конусом Λ, якщо для будь-якої точки $x_0 \in X$ знайдуться окіл $\mathfrak{O}(x_0)$ та елемент $b \in Y$ такі, що $b \preceq_{\Lambda} f(x)$, $\forall x \in \mathfrak{O}(x_0)$.*

Означення 14. *[3] Норму $\|\cdot\|_Y$ в просторі Y називають Λ-монотонною, якщо для довільних елементів $y, z \in Y$ з нерівності $0_Y \preceq_{\Lambda} y \preceq_{\Lambda} z$ випливає $\|y\|_Y \leq \|z\|_Y$.*

Означення 15. *[6] Нехай Θ — непорожня підмножина дійсного лінійного простору Z. Тоді*

$$\operatorname{cor}(\Theta) := \{\bar{y} \in \Theta \,|\forall y \in Z \ \exists \bar{\alpha} > 0 : \bar{y} + \alpha y \in \Theta, \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\} \tag{13}$$

називають алгебраїчною внутрішністю множини Θ.

Твердження 1. *Нехай дійсний нормований простір Y частково упорядковано за конусом Λ, який має непорожню алгебраїчну внутрішність. Тоді в просторі Y знайдеться послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, для якої виконується тотожність*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (b_n + \Lambda) = Y. \tag{14}$$

Доведення. Нехай b_0 — довільний представник множини $\operatorname{cor} \Lambda$. Побудуємо послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ за правилом

$$b_n = -n \cdot b_0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Виходячи з вихідних припущень та означення 15, для довільного $y \in Y$ знайдеться число $\overline{\alpha} > 0$ таке, що $b_0 + \alpha \cdot y \in \Lambda$ для всіх $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$. Отже, має місце наступна імплікація

$$b_0 + \alpha \cdot y \succeq_\Lambda 0_Y \Longrightarrow \alpha \cdot y \succeq_\Lambda -b_0 \Longrightarrow n \cdot \alpha \cdot y \succeq_\Lambda -n \cdot b_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

В силу довільності n, знайдеться n_0, для якого $\frac{1}{n_0} \in [0, \overline{\alpha}]$. Звідси отримуємо

$$y \succeq_\Lambda -n_0 \cdot b_0, \tag{17}$$

а отже $y \succeq_\Lambda -n \cdot b_0 \ \forall n \geq n_0$, що і потрібно було встановити. □

Твердження 2. *Нехай виконуються припущення твердження 1. Тоді будь-яке* epi-*нн.зн. відображення $f : X \to Y^\bullet$ є локально обмеженим знизу за конусом.*

Доведення. Припустимо обернене, а саме існує точка $x_0 \in X$, в околі якої відображення f не є обмеженим знизу за конусом Λ. Тоді для будь-якого околу $\mathfrak{O}_n(x_0)$ точки x_0 та довільного $b \in Y$ знайдеться елемент $x_n \in \mathfrak{O}_n(x_0)$, для якого $f(x_n) \not\succeq_\Lambda b$. Побудуємо послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ за правилом (15). Нехай $\{\mathfrak{O}_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонна (за включенням $\mathfrak{O}_{n+1}(x_0) \subset \mathfrak{O}_n(x_0)$) послідовність околів точки x_0 , яка задовольняє умову $\mathfrak{O}_n(x_0) \to \{x_0\}$ при $n \to \infty$ (в сенсі Куратовського).

В силу вихідних припущень, для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться точка $x_n \in \mathfrak{O}_n(x_0)$, для якої $f(x_n) \not\succeq_\Lambda b_n$. Ясно, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до x_0. Проте відповідна послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не є обмеженою знизу за конусом. Дійсно, якщо б існував елемент $y^* \in Y$ такий, що $y^* \preceq_\Lambda f(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$, то за побудовою послідовності $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ знайдеться номер n_0, при якому $b_n \preceq_\Lambda y^*$ для всіх $n > n_0$. З цього випливає, що $f(x_n) \not\succeq_\Lambda y^*$. Отже, послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена знизу за конусом. Це означає, що її границею є невласний елемент $-\infty_\Lambda$. Проте цей факт суперечить властивості epi-нн.зн. відображення f. Тим самим твердження доведено. □

Всюди далі в даній роботі будемо вважати, що конус Λ, який задає частковий порядок на просторі Y, має непорожню алгебраїчну внутрішність.

Теорема 2. *Нехай норма $\|\cdot\|_Y$ простору Y є Λ-монотонною. Нехай $f : X \to Y^\bullet$ — epi-нн.зн. відображення. Тоді його надграфік* epi$f$ *є секвенціально μ-замкненою підмножиною в $X \times Y$.*

Зауваження. Умова монотонності норми не є надто обмежливим припущенням. Наприклад, нехай на просторах $C(\Omega)$ та $L^p(\Omega)$ при $p \leq 2$, де Ω — обмежена відкрита множина, задано частковий порядок, який породжено відповідними конусами Λ невід'ємних елементів. Тоді норми в цих просторах є Λ-монотонними (див., напр., [6]).

Доведення. Припустимо обернене, а саме, нехай за зроблених припущень множина epi f не є секвенціально μ-замкненою. Тоді

$$\exists \left\{(x_n, y_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in \text{epi}\, f \quad \text{така, що} \quad (x_n, y_n) \xrightarrow{\mu} (x_0, y_0) \notin \text{epi}\, f. \tag{18}$$

Отже, розкриваючи зміст виразу (18), маємо:

$$x_n \to x_0 \;\text{ сильно в }\; X, \quad y_n \xrightarrow{\tau} y_0 \;\text{ в }\; Y; \tag{19}$$

$$f(x_n) \preceq_\Lambda y_n, \;\text{ для всіх }\; n \in \mathbb{N}; \tag{20}$$

$$f(x_0) \npreceq_\Lambda y_0. \tag{21}$$

В силу $(19)_2$, послідовність $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є обмеженою за нормою простору Y, тобто

$$\exists\, c > 0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_Y \leq c. \tag{22}$$

Окрім цього, беручи до уваги збіжність $(19)_1$ та обмеженість знизу за конусом Λ(див. твердження 2), маємо: існує елемент $b \in Y$ та номер n_0 такі, що

$$b \preceq_\Lambda f(x_n)\,, \;\forall n > n_0. \tag{23}$$

Тоді Λ-монотонність норми простору Y та нерівності (23), (18) і (20) забезпечують обмеженість послідовності $\{f(x_n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ за нормою простору Y. В результаті, залучивши теорему Банаха-Алаоглу, з послідовності $\{f(x_n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ можна виділити τ-збіжну підпослідовність (збережемо для неї попередні позначення). Нехай f^* є τ-границею обраної підпослідовності. За побудовою маємо $f^* \in L^\mu(f, x_0)$. Оскільки Λ — замкнений опуклий конус, то перейшовши в (20) до границі при $n \to \infty$, отримаємо $f^* \preceq y_0$, що в купі з (21) дає: $f(x_0) \npreceq f^*$. Отже, $f(x_0) \neq \inf_\Lambda L^\mu(f, x_0)$, що суперечить припущенню щодо epi-нн.зн. відображення f в точці x_0. Тим самим, теорема доведена. □

4 Порівняльний аналіз концепцій напівнеперервності

Проведемо тепер порівняльний аналіз наведених в роботі понять напівнеперервності знизу та epi-напівнеперервності знизу. Як і раніше, будемо вважати, що банахів простір Y наділено *-слабкою топологією τ і частково упорядковано опуклим загостреним τ-замкненим конусом Λ. Нехай $f : X \to Y^\bullet$ — довільне відображення, та нехай x_0 — довільна точка множини X така, що $f(x_0) \prec_\Lambda +\infty_\Lambda$.

Теорема 3. *Якщо відображення $f : X \to Y^\bullet$ є ск.нн.зн. в точці x_0, то f є epi-нн.зн. в цій точці.*

Доведення. Припустимо обернене, а саме, нехай f не є *epi*-нн.зн. в точці x_0. В цьому випадку маємо: $f(x_0) \neq \inf_\Lambda L^\mu(f, x_0)$. Отже, існує послідовність $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, яка збігається до x_0, і така, що відповідна їй послідовність значень $\{f(x_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ буде τ-збігатися до $f^* \in Y$, де $f^* \npreceq_\Lambda f(x_0)$.

Проте, за означенням секвенціальної напівнеперервностні знизу в точці x_0, маємо: для довільного $y \preceq_\Lambda f(x_0)$ і для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$, яка сильно збігається до x_0, існує τ-збіжна до y послідовність $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, яка задовольняє умову $y_n \preceq_\Lambda f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Нехай $y = f(x_0)$ і нехай $\{x_n = x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тоді $x_n \to x_0$. Проте, для будь-якої τ-збіжної послідовності $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, яка задовольняє умову $y_n \preceq_\Lambda f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, її границя буде меншою за конусом ніж f^* (див. [3]). Разом з тим, $y \not\preceq_\Lambda f^*$. Отже, не має жодної τ-збіжної до y послідовності $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, яка б задовольняла умову $y_n \preceq_\Lambda f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тим самим, порушується секвенціальна напівнеперервність знизу відображення f в точці x_0. Таким чином, вихідне припущення було хибним, що і доводить теорему. □

Зауважимо, що в загальному випадку обернене твердження до теореми 3 є хибним, тобто з epi-нн.зн. відображення f не випливає властивість ск.нн.зн. Наведемо тепер умови, за яких має місце імплікація: epi-нн.зн. ⇒ кв.-нн.зн..

Теорема 4. *Нехай норма $\|\cdot\|_Y$ простору Y є Λ-монотонною. Нехай $f : X \to Y^\bullet$ — epi-нн.зн. в точці $x_0 \in X$ відображення. Тоді $f : X \to Y^\bullet$ є квазі-напівнеперервним знизу в $x_0 \in X$.*

Доведення. Припустимо обернене, а саме нехай за зроблених припущень відображення $f : X \to Y^\bullet$ не задовольняє умову кв.-нн.зн. в точці $x_0 \in X$. Тоді знайдеться елемент $b \in Y$ такий, що $b \not\succeq_\Lambda f(x_0)$ і в будь-якому околі точки x_0 існує елемент x^*, на якому $b \succeq_\Lambda f(x^*)$. Звідси випливає, що можна вибрати збіжну до x_0 послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для якої відповідна послідовність значень $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ є меншою за конусом ніж елемент b. Із локальної обмеженості знизу відображення f (див. твердження 2) випливає, що послідовність $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ є обмеженою знизу за конусом. Враховуючи властивість монотонності норми простору Y це означає, що послідовність $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ обмежена за нормою простору Y. Тоді, за теоремою Банаха-Алаоглу, з неї можна виділити підпослідовність $\{f(x_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ таку, що $f(x_{n_i}) \xrightarrow{\tau} f^*$. Проте, границя цієї підпослідовності f^* буде не більшою за конусом ніж $f(x_0)$: $f^* \not\succeq_\Lambda f(x_0)$. Отже $f(x_0) \neq \inf_\Lambda L^\mu(f, x_0)$, що суперечить epi-напівнеперервності знизу відображення f в точці $x_0 \in X$. Таким чином, зроблене припущення було хибним, що і доводить теорему. □

Насамкінець, порівняємо властивості epi– та Λ-напівнепервності знизу.

Теорема 5. *З* epi-*нн.зн. відображення $f : X \to Y^\bullet$ випливає його Λ-нн.зн.*

Доведення. Нехай $\mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) \neq \varnothing$. Тоді, за означенням множини $\mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0)$ (див. (5)) та властивістю epi-нн.зн. в точці $x_0 \in X$ відображення f, маємо:

$$\mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) = \inf\nolimits_\Lambda L^\mu(f, x_0) = f(x_0).$$

Внаслідок локальної обмеженості знизу вихідного відображення (див. твердження 2), виконується умова: $\inf_\Lambda L^\mu(f, x_0) \neq -\infty_\Lambda$. Оскільки елемент $f(x_0)$ є точною нижньою межею множини $L^\mu(f, x_0)$, то він є ефективним мінімумом замикання цієї множини (див. означення 2 та 6). Отже, $f(x_0) \in \Lambda_\tau - \operatorname{Min} \mathrm{L}^\mu(f, x_0)$. Таким чином

$$f(x_0) \in \Lambda_\tau - \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} f(x) := \begin{cases} \mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0), & \mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) \neq \varnothing, \\ \Lambda_\tau - \operatorname{Min} \mathrm{L}^\mu(f, x_0), & \mathrm{L}^\mu_{\min}(f, x_0) = \varnothing, \end{cases},$$

що і доводить Λ-нн.зн. відображення f в точці x_0. □

Обернене твердження до теореми 5 є хибним в загальному випадку. Для ілюстрації цього факту наведемо такий приклад:

Приклад 2. *Нехай $Y = \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \mathbb{R}^2_{\geq}$, а відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ задане правилом*

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{якщо } x \in [-3, -1), \quad f(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = +\infty_\Lambda \textit{ інакше.}$$

Як показано в роботі [4], це відображення є Λ-нн.зн. на $\mathbb{R}$. Проте легко бачити, що воно втрачає властивість epi-*нн.зн. в точці $x_0 = -1$, оскільки*

$$\inf_\Lambda L^\mu (f, -1) = \inf_\Lambda \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq f(-1).$$

5 Властивості epi-нн.зн. відображень

Метою даного розділу є отримати умови, за яких epi-нн.зн. відображення утворюють конус в просторі відображень $F = \{f : X \to Y^\bullet\}$, де X — дійсний нормований простір, а Y — банахів простір, який наділено *-слабкою топологією τ і частково упорядковано опуклим загостреним τ-замкненим конусом Λ. Для цього достатньо показати, що добуток довільного додатнього дійсного числа на epi-нн.зн. відображення та сума двох epi-нн.зн. відображень є epi-нн.зн. відображеннями.

Твердження 3. *Нехай $f : X \to Y^\bullet$ —* epi-*нн.зн. на X відображення. Тоді для будь-якого дійсного числа $\alpha > 0$ відображення αf є також* epi-*нн.зн. на X.*

Доведення. За вихідними припущеннями маємо: $f(x) = \inf_\Lambda L^\mu (f, x)$ $\forall x \in X$. Це означає, що $f(x) \preceq_\Lambda f^*$, $\forall f^* \in L^\mu (f, x)$. Отже, $\alpha f(x) \preceq_\Lambda \alpha f^*$, $\forall f^* \in L^\mu (f, x)$, та $\forall \alpha > 0 \in \mathbb{R}$. Зауваживши при цьому, що $L^\mu (\alpha f, x) = \alpha L^\mu (f, x)$, отримуємо: $\alpha f(x) \preceq_\Lambda g$, $\forall g \in L^\mu (\alpha f, x)$, $\forall \alpha > 0 \in \mathbb{R}$. Таким чином, αf є epi-нн.зн. відображенням, що і потрібно було встановити. $\square$

Твердження 4. *Нехай норма $\|\cdot\|_Y$ простору Y є Λ-монотонною. Тоді сума двох* epi-*нн.зн.відображень є* epi-*нн.зн. відображенням.*

Доведення. Припустимо обернене. Тоді знайдуться epi-нн.зн. відображення $f : X \to Y^\bullet$ та $g : X \to Y^\bullet$ такі, що $(f+g)(x_0) \neq \inf_\Lambda L^\mu (f+g, x_0)$. Отже існує послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ з наступними властивостями:

$$x_n \to x_0, \qquad (f+g)(x_n) \xrightarrow{\tau} h^*, \tag{24}$$

$$h^* \not\succeq_\Lambda (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0). \tag{25}$$

При цьому є можливими два випадки: або послідовності $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ та $\{g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ є одночасно τ-збіжними, або ці послідовності τ-розбігаються. Розглянемо перший з них. Тоді, за epi-напівнеперервністю знизу відображень f та g, маємо:

$$h^* = \tau - \lim_{x_n \xrightarrow{\sigma} x_0} f(x_n) + \tau - \lim_{x_n \xrightarrow{\sigma} x_0} g(x_n) \succeq_\Lambda f(x_0) + g(x_0),$$

що суперечить (25).

Розглянемо тепер другий випадок, а саме, нехай обидві послідовності $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ τ-розбігаються, проте їх сума $\{(f+g)(x_n)\}_n$ τ-збігається до елемента h^*.

Якщо при цьому хоча б одна з послідовностей $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ або $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ є необмеженою за нормою простору Y, то з Λ-монотонності норми простору Y та локальної обмеженості знизу за конусом відображень f та g (див. твердження 2) випливає, що послідовність $\{(f+g)(x_n)\}_n$ також буде необмеженою за нормою. А отже, вона не буде τ-збіжною, що суперечить (24). Таким чином, обидві з послідовностей $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ та $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ є обмеженими в просторі Y. Тоді, за теоремою Банаха-Алаоглу знайдеться підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ така, що відповідні послідовності $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ та $\{g(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ будуть *-слабко збіжними. Отже, внаслідок (24), τ-границею підпослідовності $\{(f+g)(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ буде також елемент h^*. Тоді

$$h^* = \tau - \lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) + g(x_{n_k})) = \tau - \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) + \\ + \tau - \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k}) \succeq_\Lambda \text{(внаслідок epi-нн.зн. } f \text{ та } g) \succeq_\Lambda f(x_0) + g(x_0), \quad (26)$$

що знову ж суперечить (25). Таким чином, вихідне припущення було хибним, що і потрібно було показати. □

Література

1. Когут П. І. *До питання регуляризації задач векторної оптимізації* // П. І. Когут , І. В. Нечай // Вісник ДНУ, Сер. Математика, 2008. — Т.16, № 6/1. — С. 149–154.
2. Когут П. І. *Про скаляризацію одного класу задач векторної оптимізації в банахових просторах* // П. І. Когут , І. В. Нечай //Проблемы управления и информатики, 2008. — № 6. — С. 42–56.
3. Красносельский М. А. *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов.* / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев // М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 256 с.
4. Нечай І. В. *Про розв'язність та регуляризацію задач нескалярної оптимізації в банахових просторах* / І. В. Нечай // Дис. на здоб. вчен. ступ. к.ф.-м.н.,Дніпропетровськ:ДНУ, 2009.
5. Finet C., Quarta L., Troestler C. *Vector-value Variational Principles*, Preprint ♯4, January 19, Institute de Mathématique et d'Informatique, Université de Mons-Hainaut, 2001.
6. Jahn J. *Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
7. Kogut P. I., Manzo R., Nechay I. V. *Topological aspects of scalarization in vector optimization problems*, J. Inequalities in Pure and Appl. Math, 2009 (to appear).
8. Luc D. T. *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1989.
9. Mansour M. A., Metrane A., Théra M. *Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings*, Rapport de recherche, Université de Limoges, 2004.
10. Penot J. P., Théra M. *Semicontinuous mappings in general topology*, Arch. Math., **38**(1982), 158–166.

Механіко-математичний факультет,

Дніпропетровський національний університет,

p.kogut@i.ua

Надійшло ?