ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 1–19

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 681.31

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

І. Г. Баланенко*, П. І. Когут**

* *Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: balanenko-ig@rambler.ru*

** *Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Розглядаються питання класифікації розв'язків початково-крайових задач для вироджених лінійних параболічних рівнянь та дається деяке їх застосування до теорії оптимальних систем.

Ключові слова. Вироджені параболічні рівняння, слабкі розв'язки, варіаційні розв'язки, вагові простори Соболєва, теореми існування.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає початково крайова задача з однорідною умовою Діріхле на межі області для лінійного параболічного рівняння. Характерною рисою означеної задачі є той факт, що умова рівномірної еліптичності для головного оператора не виконується. В зв'язку з цим, залучення класичних результатів до проблеми розв'язності таких задач стає неможливим. Виходячи з міркувань, які наведені в роботах [5, 6], дається класифікація розв'язків таких задач в просторі Соболєва $L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$. Зокрема, вводяться такі поняття як слабкі розв'язки, V-розв'язки та варіаційні розв'язки початково крайових задач для вироджених параболічних рівнянь. Встановлено, що слабкі розв'язки, як правило, є неєдиними, на відміну від V-розв'язків. Ця обставина, як показано на прикладі однієї задачі оптимального керування в коефіцієнтах, привносить досить несподівану додаткову інформацію про якісні характеристики множини оптимальних розв'язків.

2. Основні позначення та попередні факти

Нехай $\mathbb{R}^N$ — N-вимірний евклідовий простір; $x = (x_1, \dots, x_N)$ — довільний його представник; Ω— обмежена відкрита підмножина $\mathbb{R}^N$ з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$; $\overline{\Omega}$ — замикання множини Ω, тобто $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Символом $D^\alpha y(x)$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — невід'ємний мультиіндекс, будемо позначати відповідну похідну функції $y = y(x)$, тобто

$$D^\alpha y(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N} y(x).$$

Нехай $C_0^m(\Omega)$ — банахів простір, який утворений m разів неперервно диференційовними в Ω функціями з компактними в Ω носіями і норма в якому задається правилом

$$\|y\|_{C_0^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha y(x)|\,,$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Надалі через $C_0^\infty(\Omega)$ будемо позначати локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в Ω і називати його простором фінітних або тестових функцій.

Для довільного $p \le 1$ через $L^p(\Omega)$ будемо позначати банахів простір усіх вимірних на Ω функцій, які інтегровні на Ω в степені p (тут вимірність та інтегровність розуміються в сенсі Лебега). Зауважимо, що фінітні функції $C_0^\infty(\Omega)$ утворюють щільну підмножину в $L^p(\Omega)$ при всіх p: $1 \le p < +\infty$.

Нехай $y, v \in L^1(\Omega)$ — довільна пара функцій. Кажуть, що $v \in L^1(\Omega)$ є слабкою похідною порядку α функції $y \in L^1(\Omega)$, і позначають її як $D^\alpha y = v$, якщо

$$\int_\Omega y D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Надалі, якщо вектор $\vec{v} = [v_1, \ldots, v_N] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ є градієнтом функції $y \in L^1(\Omega)$ у слабкому сенсі (або, що аналогічно, у сенсі розподілень), то будемо позначати його як $\nabla y(x)$.

Нехай $1 \le p < +\infty$ та $k \ge 0$ є довільними фіксованими величинами. Тоді через $W^{k,p}(\Omega)$ будемо позначати простір Соболєва, який утворений усіма функціями $y \in L^p(\Omega)$, для яких є скінченою норма

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha y(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

У випадку, коли $p = 2$, будемо залучати позначення $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)\,(k = 0, 1, \ldots)$. При цьому зауважимо, що $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Тут залучення літери H продиктовано тим, що $H^k(\Omega)$ є гільбертовим простором відносно операції скалярного добутку

$$(y_1, y_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha y_1(x) D^\alpha y_2(x) dx.$$

Зауважимо також, що простори Соболєва є сепарабельними банаховими просторами відносно норми (2.1), які до того ж є рефлексивними, якщо $1 < p < +\infty$.

Через $W_0^{k,p}(\Omega)$ будемо позначати замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Нехай $H_0^p(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$. Отже, якщо $y \in H_0^p(\Omega)$, то $y|_{\partial\Omega} = 0$, де останню рівність варто розуміти як значення оператору сліду на межі області Ω.

3. Вагові простори Соболєва

Нехай при кожному $i \in \{0, \dots, N\}$ ρ_i — невід'ємна функція на $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ така, що $\rho_i > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω, і при цьому

$$\rho_i \in L^1(\Omega), \quad \rho_i^{-1} \in L^1(\Omega). \tag{3.1}$$

Означення 1. Будемо казати, що $\rho_i(x)$ є виродженою ваговою функцією на Ω, якщо: $\rho_i(x) > 0$ м.с. на Ω, $\rho_i : \Omega \to \mathbb{R}$ задовольняє умову (3.1) і при цьому $\rho_i + \rho_i^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$.

Покладемо $\rho(x) = (\rho_0(x), \dots, \rho_N(x))$, де ρ_i — вироджені вагові функції у сенсі означення 1. Утотожнимо кожну функцію ρ_i з мірою Радона на Ω, тобто для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$ покладемо $\rho_i(E) = \int_E \rho_i(x)\,dx$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченою на кожній компактній множині. Простір усіх невід'ємних мір Радона на Ω будемо позначати як $\mathcal{M}_+(\Omega)$. Як відомо, $\mathcal{M}_+(\Omega)$ можна утотожнити з дуальним простором до простору $C_0(\Omega)$, в якому Ω — відкрита обмежена множина.

З кожним значенням $i \in \{0, \dots, N\}$ пов'яжемо ваговий гільбертів простір $L^2(\Omega, \rho_i\,dx)$ вимірних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} = (f, f)_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} = \int_\Omega f^2 \rho\,dx < +\infty.$$

Через $W^{1,2}(\Omega; \rho\,dx)$ (скорочено W_ρ), де $\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)$, позначимо множину усіх функцій $y \in W^{1,1}(\Omega)$, для яких виконуються умови:

$$\rho_0 y^2 \in L^1(\Omega), \quad \rho_i |D_i y|^2 \in L^1(\Omega), \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\},$$

де $D_i y = \partial y / \partial x_i$ є похідними в сенсі розподілень. Нехай відображення $\|\cdot\|_\rho : W_\rho \to \mathbb{R}$ означено за правилом

$$\|y\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i y(x)|^2 \rho_i(x)\,dx + \int_\Omega y^2(x) \rho_0(x)\,dx \right)^{1/2} \quad \forall\, y \in W_\rho. \tag{3.2}$$

Оскільки, за нерівністю Коші-Буняковського, мають місце оцінки

$$\left(\int_\Omega |y(x)|\,dx \right)^2 \le \int_\Omega y^2(x) \rho_0(x)\,dx \int_\Omega \rho_0^{-1}(x)\,dx, \tag{3.3}$$

$$\left(\int_\Omega |D_i y(x)|\,dx \right)^2 \le \int_\Omega |D_i y(x)|^2 \rho_i(x)\,dx \int_\Omega \rho_i^{-1}(x)\,dx \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\} \tag{3.4}$$

то $\|\cdot\|_\rho$ є нормою в W_ρ. При цьому, як безпосередньо випливає з (3.3), простір W_ρ є повним відносно норми $\|\cdot\|_\rho$. Надалі W_ρ будемо називати ваговим простором Соболєва.

Оскільки типовим представником вироджених вагових функцій є функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, де

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } x_1 x_2 < 0, \\ |x|^{-1}, & \text{якщо } x_1 x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x|_{\mathbb{R}^2} < 1 \right\},$$

то легко бачити, що має місце включення

$$y(\cdot) = \eta(\cdot)u(\cdot) \in W_\rho, \tag{3.5}$$

де $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta(0) = 1$, а функція $u = u(x)$ в полярних координатах задається правилом

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ x_1 > 0, x_2 > 0, \\ \sin\theta, & \text{якщо } \ x_1 < 0, x_2 > 0, \\ 0, & \text{якщо } \ x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \cos\theta, & \text{якщо } \ x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Разом з тим функція (3.5) в довільному околі точки $(0,0)$ приймає різні значення зі сторони першого та третього отранту. Отже, функцію (3.5) не можна наблизити в W_ρ жодною з функцій класу $C_0^\infty(\Omega)$. Наведене зауваження свідчить про те, що клас $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним в просторі W_ρ відносно норми $\|\cdot\|_\rho$. В зв'язку з цим означимо ще один ваговий простір Соболєва $H_\rho = H(\Omega; \rho\, dx)$ як замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_\rho$. Ясно, що за попередніми міркуваннями (див. оцінку (3.3)), множина H_ρ є банаховим простором відносно норми, індуваної нормою $\|\cdot\|_\rho$. Покладемо

$$C_\rho = \max_{0 \le i \le N} \left(\int_\Omega \rho_i^{-1}(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Тоді, виходячи з оцінок типу (3.3) та компактності вкладення $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, легко перевірити справедливість наступного результату:

Теорема 1. *Нехай $\rho(x) = (\rho_0(x), \rho_1(x), \dots, \rho_N(x))$ утворює набір вироджених вагових функцій в сенсі означення 1. Тоді:*

(i) має місце включення $H_\rho \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ і при цьому

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega)} \le C_\rho \|y\|_\rho \quad \forall\, y \in H_\rho;$$

(ii) якщо $y_k \to y$ слабко в H_ρ, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \left[\int_\Omega y_k \varphi \rho_0\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i y_k \varphi_i \rho_i\, dx \right] = \\ = \int_\Omega y \varphi \rho_0\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i y \varphi_i \rho_i\, dx \quad \forall\, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_0^\infty(\Omega),$$

то $y_k \to y$ сильно в $L^1(\Omega)$;

(iii) справедливо $H_\rho \subseteq W_\rho$, і при цьому H_ρ та W_ρ є гільбертовими просторами відносно операції скалярного добутку

$$(y, v)_\rho = (y, v)_{L^2(\Omega; \rho_0\, dx)} + \sum_{i=1}^N (D_i y, D_i v)_{L^2(\Omega; \rho_i\, dx)}. \tag{3.6}$$

В силу рефлексивності просторів H_ρ та W_ρ, маємо $\left(H_\rho^*\right)^* = H_\rho$, $\left(W_\rho^*\right)^* = W_\rho$, де дуальний простір H_ρ^* можна утотожнити з простором $W^{-1,2}(\Omega, \rho^*\, dx)$.

$$\rho^* = \left(\rho_0^{-1}, \rho_1^{-1}, \ldots, \rho_N^{-1}\right). \tag{3.7}$$

При цьому типовим представником простору H_ρ^* є наступний функціонал $F \in \mathcal{L}(H_\rho, \mathbb{R})$:

$$< F, y >_{H^*,\rho, H_\rho} = \int_\Omega f_0 y\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i D_i y\, dx \leq$$
$$\leq \left(\int_\Omega f_0^2 \rho_0^{-1}\right)^{1/2} \|y\|_{L^2(\Omega;\rho_0\, dx)} + \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho_i^{-1}\right)^{1/2} \|D_i y\|_{L^2(\Omega;\rho_i\, dx)} \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho_i^{-1}\right)^{1/2} \|y\|_\rho,$$

де $(f_0, f_1, \ldots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i^{-1}\, dx)$. З іншої сторони, за теоремою Рітца про подання лінійних неперервних функціоналів в гільбертових просторах, дуальний простір H_ρ^* можна охарактеризувати наступним чином: якщо $g \in H_\rho^*$, то знайдеться вектор-функція $g = (g_0, g_1, \ldots, g_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega : \rho_i\, dx)$ така, що

$$\langle F, y\rangle_{H_\rho^*; H_\rho} = \int_\Omega g_0 y \rho_0\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega g_i D_i y \rho_i\, dx \quad \forall\, y \in H_\rho. \tag{3.8}$$

При цьому

$$\|F\|_{H_\rho^*} = \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |g_i|^2 \rho_i\, dx\right)^{1/2} \ : \text{ де } \ g_i \ \text{ забезпечують подання (3.8)}\right\}.$$

Зауваження 1. Теорему 1 можна уточнити в наступній редакції (див., напр., [3, с. 46]): нехай $\rho_0 \equiv 1$ майже скрізь на Ω та існує число $\nu \in (N/2, +\infty)$ таке, що $\rho^{-\nu} \in L^1(\Omega)$. Тоді, умови (3.1) гарантують справедливість наступних тверджень:

(i) правило $|[y]|_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \rho_i |D_i y|^2\, dx\right)^2$ визначає норму на H_ρ, яка еквівалентна нормі $\|\cdot\|_\rho$;

(ii) вкладення $H_\rho \hookrightarrow L^2(\Omega)$ є неперервним і компактним.

4. Класи функцій зі значеннями в вагових просторах

Нехай вагова вектор-функція $\rho(x) = (\rho_0(x), \ldots, \rho_N(x))$ задовольняє умови:

(i) $\rho_i > 0$ м.с. на $\Omega \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N$;

(ii) $\rho_i \in L^1(\Omega) \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N;$

(iii) існує число $\nu \in \left(\frac{N}{2}, +\infty\right)$ таке, що $\rho_i^{-\nu} \in L^1(\Omega)$ $\forall\, i = 0, 1, \ldots, N$.

Оскільки

$$\int \Omega |\rho_i(x)|^{-1}\, dx \le \left(\int_\Omega |\rho_i(x)|^{-\nu}\right)^{1/\nu} \left(\int_\Omega dx\right)^{1/\nu^*}, \tag{4.1}$$

де $\nu^* = \nu/(\nu - 1)$, то з умов (i)–(iii) та $N \ge 2$ випливає, що

$$\rho_i^{-1} \in L^1(\Omega) \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N.$$

Отже, $\rho_i(x)$ є виродженими ваговими функціями на Ω в сенсі означення 1.

Як було зазначено вище, простір $C_0^\infty(\Omega)$ не є в загальному випадку щільним в ваговому просторі Соболєва W_ρ, що означає $H_\rho \subseteq W_\rho$, $W_\rho \setminus H_\rho \ne \emptyset$. Нехай V_ρ $(H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho)$ — довільний проміжний простір. Для його побудови досить скористатися наступним правилом: обрати довільний елемент $g \in W_\rho \setminus H_\rho$ і покласти V_ρ як замикання лінійної оболонки, натягнутої на $H_\rho \cup \{g\}$, відносно норми індукованої $\|\cdot\|_\rho$. Ясно, що V_ρ є гільбертовим простором і для будь-якого $F \in V_\rho^*$, за теоремою Ріса, знайдеться набір

$$(f_0, \ldots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i\, dx)$$

такий, що

$$\langle F, y\rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = (f_0, y)_{L^2(\Omega; \rho_0\, dx)} + \sum_{i=1}^N (f_i, D_i y)_{L^2(\Omega; \rho_i\, dx)},$$

$$\|F\|_{V_\rho^*} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|^2_{L^2(\Omega; \rho_i\, dx)}\right)^{1/2}.$$

Зауваження 2. Варто зазначити, що з кожним розподіленням $f \in L^2(\Omega; \rho_i\, dx)$ можна пов'язати елемент $\widetilde{f_i} \in L^2(\Omega; \rho_i^{-1}\, dx)$ такий, що

$$\|\widetilde{f_i}\|_{L^2(\Omega; \rho_i^{-1}\, dx)} = \|f_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i\, dx)} \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N.$$

Дійсно, поклавши $\widetilde{f_i} = f_i \rho_i$, маємо

$$\int_\Omega \left(\widetilde{f_i}\right)^2 \rho_i^{-1}\, dx = \int_\Omega (f_i \rho_i)^2\, \rho_i^{-1}\, dx = \int_\Omega f_i^2 \rho_i\, dx.$$

Отже, набору $(f_0, \ldots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i\, dx)$ відповідає вектор-функція $F^* = \left(\widetilde{f}_0, \ldots, \widetilde{f}_N\right) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i^{-1}\, dx)$ така, що

$$\langle F, y\rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = \left(\widetilde{f}_0, y\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\widetilde{f}_i, D_i y\right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, y \in V_\rho.$$

Наведене співвідношення означає, що дуальний простір V_ρ^* можна утотожнити з деякою непорожньою підмножиною простору $W^{-1,2}(\Omega; \rho^*\, dx)$ (див. (3.7)).

Пов'яжемо з кожним простором V_ρ множину функцій $u = u(t,x)$, де $t \in [0,T]$, $x \in \Omega$ і кожна з яких майже скрізь на $[0,T]$ приймає значення із вагового простору V_ρ. Таким чином, означені функції можна розглядати як функції скалярного аргумента t із значеннями в V_ρ:

$$u : [0,T] \to V_\rho.$$

У зв'язку з цим всюди далі будемо писати $u(t)$ та $\dot{u}(t)$ замість $u(t,x)$ та $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$, відповідно. Це означає, що на означений клас функцій можна поширити основні поняття теорії інтегровності за Бохнером. Зокрема, нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ — довільне диз'юнктивне розбиття відрізка $[0,T]$, тобто

$$[0,T] = \bigcup_{i=1}^n E_i; \quad E_i \cap E_j = \emptyset \ \text{ при } \ i \neq j$$

де E_i — вимірні за Лебегом множини. Тоді, функцію $u : [0,T] \to V_\rho$ називатимемо простою, якщо знайдеться набір елементів $u_1, u_2, \dots, u_n \in V_\rho$ такий, що

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) u_i, \tag{4.2}$$

де через $\chi_{E_i}(t)$ позначено характеристичні функції множин $E_i \subseteq [0,T]$.

Означення 2. Будемо казати, що $u : [0,T] \to V_\rho$ є вимірною функцією, якщо знайдеться послідовність простих функцій $\{u_k : [0,T] \to V_\rho\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\|u(t) - u_k(t)\|_{V_\rho} \to 0 \quad \text{при} \ \ k \to \infty \ \ \text{м. с. на} \ \ [0,T].$$

Ясно, що для будь-якої вимірної функції $u : [0,T] \to V_\rho$ та довільного елемента $y^* \in V_\rho^*$, відображення $t \mapsto \langle y^*, u(t)\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}$ є вимірним за Лебегом на $[0,T]$. До того ж, для довільної простої функції $u : [0,T] \to V_\rho$ можна покласти $\int_0^T u(t)\,dt = \sum_{i=1}^n |E_i| u_i$. В результаті приходимо до наступного поняття:

Означення 3. Будемо казати, що функція $f : [0,T] \to V_\rho$ є інтегровною на $[0,T]$, якщо знайдеться послідовність простих функцій $\{u_k : [0,T] \to V_\rho\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\int_0^T \|f(t) - u_k(t)\|_{V_\rho}\,dt \to 0 \quad \text{при} \ \ k \to \infty.$$

При цьому інтеграл від $f(t)$ на $[0,T]$ можна означити як

$$\int_0^T f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^T u_k(t)\,dt.$$

Тепер, у повній аналогії до відомої теореми Бохнера, можна встановити наступний результат:

Теорема 2. *Вимірна функція $f : [0,T] \to V_\rho$ є інтегровною на $[0,T]$ тоді і тільки тоді, коли є інтегровною за Лебегом на $[0,T]$ скалярна функція*

$t \mapsto \|f(t)\|_{V_\rho}$. *При цьому*

$$\left\|\int_0^T f(t)\,dt\right\|_{V_\rho} \le \int_0^T \|f(t)\|_{V_\rho}\,dt, \tag{4.3}$$

$$\left\langle y^*, \int_0^T f(t)\,dt\right\rangle_{V_\rho^*;V_\rho} = \int_0^T \langle y^*, f(t)\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\,dt \quad \forall\, y^* \in V_\rho^*. \tag{4.4}$$

Позначимо через $L^p(0,T;V_\rho)$ множину всіх вимірних функцій $y:[0,T]\to V_\rho$ таких, що

$$\|y\|_{L^p(0,T;V_\rho)} = \left(\int_0^T \|y(t)\|^p_{V_\rho}\,dt\right)^{1/p} \qquad \text{при} \quad 1 \le p \le +\infty,$$

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;V_\rho)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_{V_\rho} \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Тоді $L^p(0,T;V_\rho)$ утворюють банахові простори при $1 \le p \le +\infty$ відносно наведених норм (див. [2]), а простір $L^2(0,T;V_\rho)$ є гільбертовим відносно операції скалярного добутку

$$(y,f)_{L^2(0,T;V_\rho)} = \int_0^T (y(t), f(t))_{V_\rho}\,dt$$

Введемо поняття похідної в сенсі розподілень для функцій $y:[0,T]\to V_\rho$.

Означення 4. Будемо казати, що $\dot y \in L^1_{loc}(0,T;V_\rho^*)$ є слабкою похідною функції $y \in L^1_{loc}(0,T;V_\rho)$, якщо для всіх $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ та $u \in V_\rho$ має місце рівність

$$\int_0^T \varphi(t)\,\langle \dot y(t), u\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\,dt = -\int_0^T \dot\varphi(t)\,\langle y(t), u\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\,dt. \tag{4.5}$$

Розглянемо наступний функціональний простір

$$\mathcal{W}(0,T;V_\rho,V_\rho^*) = \left\{y \in L^2(0,T;V_\rho) \;:\; \dot y \in L^2(0,T;V_\rho^*)\right\}. \tag{4.6}$$

У випадку, коли V_ρ^* в (4.5)–(4.6) можна замінити на V_ρ, будемо писати $\mathcal{W}(0,T;V_\rho,V_\rho^*) = H^1(0,T;V_\rho)$ і називати $H^1(0,T;V_\rho)$ простором Соболєва функцій $y \in L^2(0,T;V_\rho)$, чиї похідні належать $L^2(0,T;V_\rho)$. Тоді, приймаючи до уваги зауваження 1 та теорему II.1.3 з [2], приходимо до наступного результату:

Теорема 3. *Нехай $\rho_0(x)\equiv 1$ і існує стала $\nu \in (N/2,+\infty)$ така, що $\rho_i^{-\nu} \in L^1(\Omega)$ при всіх $i = 1,2,\dots,N$. Нехай y— довільний представник простору $\mathcal{W}(0,T;H_\rho,H_\rho^*)$, де $H_\rho^* = W^{-1,2}(\Omega;\rho^*\,dx)$. Тоді:*

(a) $y \in C([0,T];L^2(\Omega))$ *і при цьому*

$$\max_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C\left[\|y(t)\|_{L^2(\Omega;H_\rho)} + \|\dot y(t)\|_{L^2(\Omega;H_\rho^*)}\right];$$

(b) *якщо* $u \in \mathcal{W}(0,T;H_\rho,H_\rho^*)$, *то є справедливою наступна формула інтегрування за частинами*

$$\int_s^t \Big[\langle \dot{y}(\gamma), u(\gamma)\rangle_{H_\rho^*;H_\rho} + \langle y(\gamma), \dot{u}(\gamma)\rangle_{H_\rho^*;H_\rho}\Big]\, d\gamma = \\ = (y(t),u(t))_{H_\rho} - (y(s),u(s))_{H_\rho} \quad \forall\, s,t \in [0,T].$$

Зауваження 3. Оскільки, в загальному випадку, вкладення $V_\rho \hookrightarrow L^2(\Omega;\rho_0\,dx)$ не є компактними, то питання про неперервність вкладення вагового простору $\mathcal{W}(0,T;V_\rho,V_\rho^*)$ в простір неперевних функцій $C([0,T];L^2(\Omega;\rho_0\,dx))$ залишається відкритим і недослідженим на сьогодні.

5. Класифікація розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь

Нехай $T>0$ — фіксований момент часу, Ω — обмежена відкрита область в $\mathbb{R}^N$ з неперервною за Ліпшицем межею $\partial\Omega$. Покладемо $Q_T = (0,T)\times\Omega$, $S_T = [0,T]\times\partial\Omega$. Нехай α, β ($\beta>\alpha>0$) — задані дійсні числа. Позначимо через $M_\alpha^\beta(\Omega)$ множину усіх вимірних симетричних матриць $A = A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=\overline{1,N}}$ таких, що

$$\alpha\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N} \le (A(x)\xi,\xi)_{\mathbb{R}^N} \le \beta\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^N. \tag{5.1}$$

Нехай $\rho:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ — вагова функція, для якої виконуються припущення (i)–(iii) параграфу 4. Нехай $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ та $y_0\in L^2(\Omega)$ — задані функції. Розглянемо в циліндрі Q_T наступну початково-крайову задачу Діріхле

$$y_t - \operatorname{div}\,(A(x)\rho(x)\nabla y) + y = f \text{ в } \quad Q^T, \tag{5.2}$$

$$y(0,x) = y_0(x) \text{ в } \quad \Omega, \tag{5.3}$$

$$y(t,x) = 0 \text{ на } \quad S_T. \tag{5.4}$$

За аналогією з попередніми параграфами, пов'яжемо з функцією ρ наступні вагові простори:

$$W_\rho = \left\{ y\in W_0^{1,1}(\Omega) \;:\; \|y\|_\rho := \left(\int_\Omega y^2\,dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx\right) < +\infty \right\}, \tag{5.5}$$

$$H_\rho = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|_\rho} C_0^\infty(\Omega). \tag{5.6}$$

Всюди далі функцію $y:[0,T]\to W_\rho$ будемо позначати як функцію одного аргумента $y=y(t)$.

Означення 5. Функцію $y\in L^2(0,T;W_\rho)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (5.2)–(5.4), якщо виконуються наступні умови:

(a) для кожного $v\in C_0^\infty(\Omega)$ та довільних $0\le t_1<t_2\le T$ справджується інтегральна тотожність

$$(y(t),v)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y(t),v]_\rho^A\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\,dt; \tag{5.7}$$

(b) при кожному $v \in C_0^\infty(\Omega)$ має місце рівність

$$\lim_{t\to 0+} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} = (y_0, v)_{L^2(\Omega)}\,. \tag{5.8}$$

Тут через $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ позначено операцію скалярного добутку в $L^2(\Omega)$, а

$$[u,v]_\rho^A = \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^N}\,\rho + uv\right] dx, \quad \forall\, u, v \in W_\rho.$$

Зауваження 4. Оскільки функція y, як слабкий розв'язок задачі (5.2)–(5.4), належить простору $L^2(0,T;W_\rho)$ і при цьому мають місце оцінки

$$[y(t),v]_\rho^A \le 2\max\{1,\beta\}\,\|v\|_\rho \|y(t)\|_\rho, \tag{5.9}$$

$$\left|(f(t),v)_{L^2(\Omega)}\right| \le \|v\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.10}$$

то, як випливає з рівності (5.7), відображення

$$(y(\cdot),v)_{L^2(\Omega)} : [0,T] \to \mathbb{R}$$

є неперервним. Отже, $y(\cdot) : [0,T] \to W_\rho$ — слабко неперевна функція і така, що (див. (5.8))

$$y|_{t=0} = y_0 \quad \text{як елементи простору} \quad L^2(\Omega).$$

Зауваження 5. Насправді співвідношення (5.7) можна тлумачити в сенсі розподілень на $\mathcal{D}(0,T)$. Дійсно, нехай $y \in L^2(0,T;W_\rho)$ є слабким розв'язком задачі (5.2)–(5.4). Оскільки

$$\begin{aligned}|\mathrm{div}\,(A\rho\nabla y(t))\,[v]| &\le \int_\Omega |(A(x)\nabla y(t,x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N}|\,\rho(x)\,dx \le \\ &\le \|A\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}\|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega;\rho\,dx)^N}\|v\|_\rho \le C\|v\|_\rho \quad \forall\, v \in W_\rho,\end{aligned}$$

то $\mathrm{div}\,(A\rho\nabla y(t)) \in W_\rho^*\ \forall\, t \in (0,T)$. Отже, як випливає з рівняння (5.2), маємо: $\dot y \in L^2(0,T;W_\rho^*)$. Покажемо, що для кожного $v \in W_\rho$ функція $w(t) = \langle \dot y(t), v\rangle_{W_\rho^*;W_\rho}$ є розподіленням в $\mathcal{D}'(0,T)$, тобто

$$\langle \dot y(t), v\rangle_{W_\rho^*;W_\rho} = \frac{d}{dt}\,(y(t),v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0,T), \tag{5.11}$$

або інакше, що для довільного $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ виконується рівність

$$\int_0^T \langle \dot y(t), v\rangle_{W_\rho^*;W_\rho}\,\varphi(t)\,dt = -\int_0^T (y(t),v)_{L^2(\Omega)}\,\dot\varphi(t)\,dt.$$

Дійсно, оскільки $y(t) \in W_\rho$ і $y \in L^2(0,T;W_\rho)$, то за теоремою Бохнера (див. теорему 2) можемо записати

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \dot y(t), v\rangle_{W_\rho^*;W_\rho}\,\varphi(t)\,dt &= \left\langle \int_0^T \dot y(t)\varphi(t)\,dt, v\right\rangle_{W_\rho^*;W_\rho} = \\ &= \left\langle -\int_0^T y(t)\dot\varphi(t)\,dt, v\right\rangle_{W_\rho^*;W_\rho}.\end{aligned}$$

Проте, $\int_0^T y(t)\dot{\varphi}(t)\,dt \in W_\rho$. Отже,

$$\left\langle -\int_0^T y(t)\dot{\varphi}(t)\,dt, v\right\rangle_{W_\rho^*;W_\rho} = -\left(\int_0^T y(t)\dot{\varphi}(t)\,dt, v\right)_{L^2(\Omega)} =$$
$$= -\int_0^T (y(t),v)_{L^2(\Omega)}\,\dot{\varphi}(t)\,dt \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Таким чином, $w(t) := \langle \dot{y}(t), v\rangle_{W_\rho^*;W_\rho} \in L^1_{loc}(0,T) \subset \mathcal{D}'(0,T)$ і має місце рівність (5.11).

Як наслідок наведеного аналізу маємо наступний висновок: рівняння (5.7) можна подати у вигляді:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\,(y(t),v)_{L^2(\Omega)} + [y(t),v]^A_\rho = (f(t),v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{в} \;\; \mathcal{D}'(0,T), \\ \text{при всіх} \;\; v\in W_\rho, \end{array}\right\} \tag{5.12}$$

що і потрібно було встановити.

Зауваження 6. Слабкий розв'язок $y \in L^2(0,T;W_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4), в загальному випадку, не є єдиним. Дійсно, припустивши існування двох різних слабких розв'язків y_1 та y_2 $(y_1 \neq y_2)$, маємо:

$$\left.\begin{array}{c} (y_1(t)-y_2(t),v)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} [y_1(t)-y_2(t),v]^A_\rho\;dt = 0; \\ \displaystyle\lim_{t\to 0+}\,(y_1(t)-y_2(t),v)_{L^2(\Omega)} = 0 \end{array}\right\} \tag{5.13}$$

для всіх $v\in C_0^\infty(\Omega)$. Проте простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним в W_ρ, тобто може не існувати послідовності $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такої, що

$$v_k \to y_1(t) = y_2(t) \quad \text{за нормою} \;\; \|\cdot\|_\rho.$$

Таким чином, виконання умови (5.13) при всіх $v\in C_0^\infty(\Omega)$ не гарантує рівність $y_1(t) = y_2(t)$ м.с. на Ω.

Приймаючи до уваги наведені зауваження, введемо наступне поняття:

Означення 6. Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Будемо казати, що функція $y\in L^2(0,T;W_\rho)$ є V_ρ-розв'язком задачі (5.2)–(5.4), якщо тотожності (5.7)–(5.8) виконуються при всіх $v\in V_\rho$.

Як буде показано далі, для будь-якого проміжного простору V_ρ існування V_ρ-розв'язків є наслідком відомої теореми про розв'язність абстрактних еволюційних рівнянь з монотонними операторами, а єдиність таких розв'язків забезпечується умовою строгої монотонності

$$(A(x)\xi - A(x)\eta, \xi-\eta)_{\mathbb{R}^N} > 0 \quad \forall\,\xi\neq\eta\in\mathbb{R}^N \;\; \text{м. с. на} \;\; \Omega,$$

яка в свою чергу є наслідком властивості $A\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ (див. (5.1)). В зв'язку з цим нагадаємо наступний результат (див., напр., [2, с.75]):

Теорема 4. *Нехай V — рефлексивний сепарабельний банахів простір, який неперервно вкладений в гільбертів простір H, і нехай V^* — дуальний до V простір. Нехай $\mathcal{A} : V \to V^*$ — обмежений демінеперервний коерцитивний монотонний оператор. Тоді задача*

$$\dot{y}(t) + \mathcal{A}\, y(t) = f \quad \text{в} \;\; \mathcal{D}'(0,T),$$
$$y(0) = y_0$$

має единий розв'язок $y \in \mathcal{W}(0,T)$ при кожних $f \in L^2(0,T;V^*)$ та $y_0 \in H$, де

$$\mathcal{W}(0,T) = \left\{ y \in L^2(0,T;V) \;:\; \dot{y} \in L^2(0,T;V^*) \right\},$$

такий, що

$$(y(t),v)_H\big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathcal{A}\, y(t), v\rangle_{V^*;V}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v\rangle_{V^*;V}\, dt \quad \forall\, 0 \le t_1 < t_2 \le T,$$
$$\lim_{t\to 0+} \langle y(t), v\rangle_{V^*;V} = \langle y_0, v\rangle_{V^*;V} = (y_0, v)_H.$$

для довільного $v \in V$.

Тут властивості монотонності, демінеперервності та коерцитивності оператора $\mathcal{A} : V \to V^*$ розуміються в наступному сенсі:

$$\langle \mathcal{A}\, u - \mathcal{A}\, v, u - v\rangle_{V^*;V} \ge 0 \quad \forall\, u, v \in V; \tag{5.14}$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}\,(u + tv), w\rangle_{V^*;V} \quad \text{неперервно при всіх} \;\; u, v, w \in V; \tag{5.15}$$

$$\lim_{\|v\|_V \to \infty} \langle \mathcal{A}\, v, v\rangle_{V^*;V}\, \|v\|_V^{-1} = +\infty. \tag{5.16}$$

Теорема 5. *Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Тоді при заданих $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ задача* (5.2)–(5.4) *має единий V_ρ-розв'язок $y \in \mathcal{W}(0,T;V_\rho,V_\rho^*)$ (див* (4.6)*).*

Доведення. Покажемо, що в цьому випадку виконуються усі передумови теореми 4. Дійсно, поклавши в теоремі 4 $V = V_\rho$ і $H = W_\rho$, пов'яжемо з задачею (5.2)–(5.4) лінійний оператор $\mathcal{A} : V_\rho \to V_\rho^*$, який означимо за правилом:

$$\langle \mathcal{A} y, v\rangle_{V_\rho^*;V_\rho} = [y,v]_\rho^A \quad \forall\, y, v \in V_\rho. \tag{5.17}$$

Тоді в силу оцінки (5.9) та умови $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, білінійна форма $[y,v]_\rho^A$ при кожному фіксованому $y \in V_\rho$ є неперервною за аргументом v. Отже, оператор $\mathcal{A} : V_\rho \to V_\rho^*$ в (5.17) є лінійним і обмеженим. При цьому зауважимо, що властивості (5.14)–(5.16) є очевидним наслідком (5.9) та умови $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$. Таким чином, за теоремою 4 задача (5.2)–(5.4) має єдиний V_ρ-розв'язок в просторі $\mathcal{W}(0,T;V_\rho,V_\rho^*)$, що і потрібно було встановити. □

Наведемо ще одну характеристику V_ρ-розв'язків задачі (5.2)–(5.4), яка буде залучена далі.

Означення 7. Будемо казати, що трійка просторів

$$V_\rho \subseteq L^2(\Omega) \subseteq V_\rho^* \tag{5.18}$$

є еволюційною, якщо простір V_ρ неперервно та щільно вкладається в $L^2(\Omega)$.

Зауважимо, що виходячи з умов (i)–(ii) параграфу 4 та зауваження 2, трійка (5.18) є еволюційною принаймні для $V_\rho = H_\rho$.

Твердження 1. Нехай функція $y \in L^2(0,T;V_\rho)$ є V_ρ-розв'язком задачі (5.2)–(5.4) і нехай при заданому V_ρ трійка просторів (5.18) є еволюційною. Тоді $y \in C([0,T];L^2(\Omega))$ і при цьому для будь-яких $0 \le t_1 < t_2 \le T$ виконується енергетична рівність:

$$\frac{1}{2}\,\|y(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\|y(t)\|_\rho^A\right)^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t),y(t))_{L^2(\Omega)}\,dt, \tag{5.19}$$

де позначено

$$\|y(t)\|_\rho^A = \left(\int_\Omega \left[(A(x)\nabla y(t),\nabla y(t))_{\mathbb{R}^N}\,\rho + y^2(t)\right]\,dx\right)^{1/2}.$$

Доведення. Перепишемо тотожність (5.7) у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}(t),v\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} [y(t),v]_\rho^A\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

де v є довільною функцією з V_ρ. Оскільки $\langle \dot{y}(t),v\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}$ є розподіленням в $\mathcal{D}'(0,T)$, то з попереднього отримуємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}(t),v\varphi(t)\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} [y(t),v\varphi(t)]_\rho^A\,dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t),v\varphi(t))_{L^2(\Omega)}\,dt \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{5.20}$$

Так як функції $\{v\varphi(t)\}$ утворюють щільну підмножину в $L^2(0,T;V_\rho)$, то співвідношення (5.20) залишиться в силі, поклавши замість $v\varphi(t)$ функцію $y(t)$. Тепер скористаємося формулою інтегрування за частинами

$$(y(t),u(t))_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}(t),u(t)\rangle_{V_\rho^*;V_\rho} + \langle \dot{u}(t),y(t)\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\right]\,dt \\ \forall\,u,y \in \mathcal{W}(0,T;V_\rho,V_\rho^*), \tag{5.21}$$

справедливість якої гарантована вихідними припущеннями щодо еволюційності трійки просторів (5.18) (див. [2, с.15]). В результаті, енергетична рівність (5.19) є наслідком співвідношень (5.20)–(5.21) при $u(t) = y(t)$. Для завершення доведення досить скористатися наступним відомим результатом (див. [4]): якщо $V \subseteq H \subseteq V^*$ — еволюційна трійка просторів, де H гільбертів простір, то вкладення $\mathcal{W}(0,T;V,V^*) \hookrightarrow C([0,T];H)$ є неперервним. $\square$

Зауваження 7. Якщо в умовах твердження 1 не вимагати, щоби простори (5.18) утворювали еволюційну трійку, то енергетична рівність (5.19) набуде вигляду:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\langle\dot{y}(t),y(t)\rangle_{V_\rho^*,V_\rho}+\left(\|y(t)\|_\rho^A\right)^2\right]dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}(f(t),y(t))_{L^2(\Omega)}\,dt\quad\forall\,t_1,t_2\in\mathbb{R}:0\le t_1<t_2\le T.\tag{5.22}$$

Як легко бачити, рівність (5.22) не залежить явно від вибору простору V_ρ. Отже, в певному сенсі її можна вважати визначальною. У зв'язку з цим приймемо за основу наступне поняття:

Означення 8. V_ρ-розв'язок $y\in L^2(0,T;V_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4) будемо називати варіаційним, якщо він задовольняє енергетичну рівність (5.19).

Зауважимо, що варіаційні розв'язоки не вичерпують всю множину слабких розв'язоків. Для уточнення сказаного, наведемо наступний результат.

Твердження 2. Нехай функції y_1 та y_2 є варіаційними розв'язками задачі (5.2)–(5.4) і такими, що $y_1\neq y_2$. Тоді функція $(y_1+y_2)/2$ є слабким, проте не варіаційним розв'язком тієї ж задачі.

Доведення. Дійсно, для напівсуми $(y_1+y_2)/2$, як легко бачити, інтегральні тотожності (5.7)–(5.8) залишаться в силі. Проте, що торкається енергетичної рівності (5.19), то в силу оцінки

$$\left[\frac{y_1(t)+y_2(t)}{2},\frac{y_1(t)+y_2(t)}{2}\right]_\rho^A<\frac{1}{2}\left([y_1(t),y_1(t)]_\rho^A+[y_2(t),y_2(t)]_\rho^A\right)$$

її виконання стає неможливим. Твердження доведено. □

Наступний результат можна вважати центральним в даному розділі.

Теорема 6. *Слабкий розв'язок* $y\in L^2(0,T;V_\rho)$ *задачі* (5.2)–(5.4) *є її* V_ρ-*розв'язком тоді і тільки тоді, коли він варіаційний.*

Доведення. Імплікація "V_ρ-розв'язок $\Longrightarrow$ слабкий розв'язок" є очевидною внаслідок означень 8 та 5. Нехай $y^*\in L^2(0,T;V_\rho)$ є тим слабким розв'язком, який задовольняє енергетичну рівність (5.19). Покажемо, що в цьому випадку має місце обернена імплікація "слабкий розв'язок $\Longrightarrow V_\rho$-розв'язок " при деякому V_ρ $(H_\rho\subseteq V_\rho\subseteq W_\rho)$.

Утворимо простір $L^2(0,T;V_\rho)$ за правилом:

$$L^2(0,T;V_\rho)=\mathrm{Li}\left\{y^*,L^2(0,T;H_\rho)\right\},$$

де через $=\mathrm{Li}\,\{A,B\}$ позначено лінійну оболонку множин A та B. Отже, $L^2(0,T;V_\rho)$ є найменшим за включенням підпростором простору $L^2(0,T;W_\rho)$, який містить y^* та $L^2(0,T;H_\rho)$. В результаті, для довільного елемента $y\in L^2(0,T;V_\rho)$ має місце декомпозиція

$$y=\alpha y^*+\beta\widetilde{y},\tag{5.23}$$

де $\widetilde{y} \in L^2(0,T;H_\rho)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Оскільки $y^* \in L^2(0,T;W_\rho)$ є слабким розв'язком, то за означенням 5 повинна виконуватися інтегральна тотожність:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), v\varphi(t)\rangle_{W_\rho^*;W_\rho}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), v\varphi(t)]_\rho^A\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v\varphi(t))_{L^2(\Omega)}\, dt \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \qquad (5.24)$$

при всіх $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Так як функції

$$\{v\varphi(t) \ : \ v \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(0,T)\}$$

утворюють щільну множину в $L^2(0,T;H_\rho)$, то тотожність (5.24) можна поширити до вигляду

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), \widetilde{y}(t)\rangle_{W_\rho^*;W_\rho}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), \widetilde{y}(t)]_\rho^A\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \widetilde{y}(t))_{L^2(\Omega)}\, dt, \qquad (5.25)$$

де $\widetilde{y}$ — довільний елемент простору $L^2(0,T;H_\rho)$.

Беручи до уваги, що $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$, маємо $W_\rho^* \subseteq V_\rho^* \subseteq H_\rho^*$. Отже, співвідношення (5.25) можна переписати у вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), \widetilde{y}(t)\rangle_{V_\rho^*;V_\rho}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), \widetilde{y}(t)]_\rho^A\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \widetilde{y}(t))_{L^2(\Omega)}\, dt \quad \forall\, \widetilde{y} \in L^2(0,T;H_\rho). \qquad (5.26)$$

Для завершення доведення досить показати, що співвідношення (5.26) залишиться в силі для довільної функції $\widetilde{y} \in L^2(0,T;V_\rho)$. Для цього скористаємося енергетичною рівністю (5.19) і перепишемо її у вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\langle \dot{y}^*(t), y^*(t)\rangle_{V_\rho^*,V_\rho} + [y^*(t), y^*(t)]_\rho^A\Big]\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y^*(t))_{L^2(\Omega)}\, dt \quad \forall\, 0 \le t_1 < t_2 \le T. \qquad (5.27)$$

Тоді, залучаючи декомпозицію (5.23) та рівності (5.26) і (5.27), приходимо до співвідношення

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\langle \dot{y}^*(t), y(t)\rangle_{V_\rho^*,V_\rho} + [y^*(t), y(t)]_\rho^A\Big]\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)}\, dt \quad \forall\, y \in L^2(0,T;V_\rho).$$

Отже,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\langle\dot{y}^*(t),\rangle_{V_\rho^*,V_\rho}+[y^*(t),v]_\rho^A\right]\varphi(t)\,dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}(f(t),v)_{L^2(\Omega)}\,\varphi(t)\,dt\quad\forall\,\varphi\in C_0^\infty(0,T),\ \forall\,v\in V_\rho.$$

Таким чином, y^* є V_ρ-розв'язком задачі (5.2)–(5.4), що і потрібно було встановити. □

6. Про деякі застосування в теорії оптимальних систем

Нехай, як і вище, Ω є обмеженою відкритою множиною в $\mathbb{R}^N$ $(N\geq 1)$ з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай ξ_1 та ξ_2 — задані елементи простору $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ з наступними властивостями:

$$0<\xi_1(x)\leq\xi_2(x)\ \text{майже скрізь в}\ \ \Omega,\quad \xi_1^{-1}\in L^1(\mathbb{R}^N).\tag{6.1}$$

Нехай $m\in\mathbb{R}_+$ — додатна величина така, що $\|\xi_1\|_{L^1(\Omega)}\leq m\leq\|\xi_2\|_{L^1(\Omega)}$.

Для заданих $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $y_0\in L^2(\Omega)$ та $y_d\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$I(A,\rho,y)=\zeta\int_\Omega|y(x)-y_d(x)|^2\,dx+\int_\Omega\|\nabla y(x)\|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx\longrightarrow\inf\tag{6.2}$$

за наступних обмежень:

$$y'-\operatorname{div}A(x)\rho(x)\nabla y+y=f\quad\text{в}\ \ Q^T,\tag{6.3}$$
$$y(0,x)=y_0(x)\quad\ \text{в}\ \ \Omega,\tag{6.4}$$
$$y(t,x)=0\quad\ \text{на}\ \ S_T.\tag{6.5}$$

Будемо казати, що пара $(A,\rho)\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})\times L^1(\Omega)$ є допустимим керуванням для початково-крайової задачі (6.3)–(6.5), якщо $A=[\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_N]\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ і $\rho\in\mathcal{R}_{ad}$, де позначено

$$\mathcal{R}_{ad}=\left\{\rho\in L^1(\Omega)\ :\ \int_\Omega\rho\,dx=m,\ \xi_1(x)\leq\rho(x)\leq\xi_2(x)\ \text{м. с. в}\ \ \Omega\right\}.\tag{6.6}$$

Наступне поняття є ключовим для даної задачі:

Означення 9. Будемо казати, що трійка функцій (A,ρ,y) є допустимою для задачі оптимального керування (6.2)–(6.6), якщо $(A,\rho)\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})\times L^1(\Omega)$ є допустимим керуванням, а елемент

$$y\in L^2(0,T;W_\rho)=\Big\{g\in L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))\ :\ \int_0^T\int_\Omega\left(g^2+\rho\,|\nabla g|^2\right)\,dxdt<+\infty\Big\}\tag{6.7}$$

є слабким розв'язком задачі (6.3)–(6.5) в сенсі означення 5, тобто для кожного $v\in C_0^\infty(\Omega)$ та довільних $0\leq t_1<t_2\leq T$ функція $y=y(A,\rho)$ задовольняє інтегральну тотожність (5.7) та умову (5.8).

Позначимо через Ξ множину усіх допустимих розв'язків наведеної вище задачі оптимального керування. Зрозуміло, що проблема єдиності слабкого розв'язку тісно пов'язана з проблемою щільності простору $C_0^\infty(\Omega)$ у ваговому просторі Соболєва W_ρ. Проте як показано в роботі [5], існують приклади вироджених вагових функцій ρ, при яких означена вище властивість щільності простору $C_0^\infty(\Omega)$ в W_ρ порушується. Отже, в цьому випадку для задачі (6.3)–(6.5) при фіксованій парі $(A,\rho) \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N}) \times L^1(\Omega)$ може існувати декілька, загалом незалежних, слабких розв'язків. Проте в силу лінійності вихідного об'єкта керування, при кожному допустимому наборі (A,ρ) відповідна множина слабких розв'язків задачі (6.3)–(6.5) є опуклою і замкненою. До того ж, залучаючи аргументи роботи [5] та теорему 5, легко показати, що для кожної допустимої пари (A,ρ) початково крайова задача (6.3)–(6.5) допускає принаймні один слабкий розв'язок в сенсі означення 5. Таким чином, $\Xi \neq \emptyset$, а отже, задача оптимального керування (6.2)–(6.6) є регулярною.

Означення 10. Будемо казати, що набір функцій

$$(A^0,\rho^0,y^0) \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N}) \times L^1(\Omega) \times L^2(0,T;W_\rho)$$

є слабким оптимальним розв'язком задачі (6.2)–(6.6), якщо (A^0,ρ^0,y^0) є мінімізантом наступної задачі

$$\left\langle \inf_{(A,\rho,y)\in\,\Xi} I(A,\rho,y) \right\rangle.$$

В зв'язку з цим зауважимо, що існування слабких оптимальним розв'язків задач керування для вироджених параболічних рівнянь є на сьогодні новою і не дослідженою в повному обсязі проблемою. Основними причинами такої ситуації є наступні: по-перше, для слабких розв'язків початково крайової задачі (6.3)–(6.5) немає зручних апріорних оцінок в нормі простору $\|\cdot\|_{L^2(0,T;W_\rho)}$. Подруге, недослідженими залишаються такі топологічні властивості множини допустимих слабких розв'язків Ξ як замкненість та компактність. По-третє, що є характерним лише для задач означеного вище класу, кожна допустима трійка (A,ρ,y) належить відповідному (тобто строго асоційованому з нею) простору $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N}) \times L^1(\Omega) \times L^2(0,T;W_\rho)$, а отже, множина Ξ утворена сукупністю об'єктів, які належать різним функціональним просторам.

За аналогією з попередніми параграфами, для кожного допустимого керування (A,ρ), позначимо через H_ρ замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за $\|\cdot\|_\rho$-нормою. Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Тоді, залучаючи аргументи роботи [6], легко переконатися в справедливості наступного результату, який є характерним для означеного класу задач.

Твердження 3. Нехай (A,ρ) — допустиме керування, і нехай $V_{1,\rho}$ and $V_{2,\rho}$ — пов'язані з ним проміжні простори такі, що $(V_{1,\rho} \neq V_{2,\rho})$. Нехай $y_1 = y_1(A,\rho)$ та $y_2 = y_2(A,\rho)$ є відповідними V_ρ-розв'язками початково крайової задачі (6.3)–(6.5) в сенсі означення 6. Припустимо, що $y_1 \neq y_2$. Тоді будь-який елемент їх опуклої оболонки

$$\operatorname{conv}\{y_1,y_2\} = \{\eta y_1 + (1-\eta)y_1 \;:\; \forall\,\eta \in (0,1)\}$$

є лише слабким, проте не еволюційним, розв'язком вихідної задачі (6.3)–(6.5).

Беручи даний факт до уваги, покажемо, що для задачі (6.2)–(6.6) має місце результат, який не є характерним для теорії лінійно-квадратичних задач оптимального керування.

Твердження 4. Нехай $(A^0, \rho^0, y^0) \in \Xi$ є слабким (проте не варіаційним) оптимальним розв'язком задачі (6.2)–(6.6). Припустимо, що множина

$$E = \Big\{ x \in \Omega \ \ : \ A^0(x) > \alpha I, \ \left(A^0(x)\right)^{-1} > \beta^{-1} I \Big\} \tag{6.8}$$

має ненульову лебегову міру і існує матриця $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ така, що для довільних довільних $0 \le t_1 < t_2 \le T$ та $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ виконується рівність:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \Big(A^*(x) \ \nabla y^0, \nabla \varphi \Big)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 \, dx \, dt = 0. \tag{6.9}$$

Тоді слабкі оптимальні розв'язки задачі (6.2)–(6.6) утворюють континуум.

Доведення. Оскільки $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, то як легко бачити матриця

$$A_\theta(x) = A^0(x) + \theta \chi_E(x) A^*(x)$$

буде також належати множині $M_\alpha^\beta(\Omega)$ при всіх достатньо малих $|\theta|$. Тут через χ_E позначено характеристичну функцію множини E. В результаті, поєднуючи інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}
&\left(y^0(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[y^0(t), \varphi\right]_{\rho^0}^{A^0} \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)} \, dt := \\
&:= \left(y^0(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left[\left(A^0(x) \nabla y^0, \nabla \varphi\right)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 + y^0 \varphi \right] dx \, dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)} \, dt = 0 \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \ 0 \le t_1 < t_2 \le T
\end{aligned}$$

з умовою (6.9), приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned}
&\left(y^0(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left[\left(A_\theta(x) \nabla y^0, \nabla \varphi\right)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 + y^0 \varphi \right] dx \, dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t), \varphi\right)_{L^2(\Omega)} \, dt = 0 \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \forall \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \ 0 \le t_1 < t_2 \le T.
\end{aligned}$$

Отже, трійка функцій (A_θ, ρ^0, y^0) є також слабким допустимим розв'язком задачі оптимального керування (6.2)–(6.6) при достатньо малих значеннях $|\theta|$, тобто $(A_\theta, \rho^0, y^0) \in \Xi \; \forall \, \theta \in (0, \theta^*)$ з деяким $\theta^* > 0$. Оскільки

$$I(A_\theta, \rho^0, y^0) \equiv I(A^0, \rho^0, y^0),$$

то пара (A_θ, ρ^0) є слабким оптимальним керуванням при всіх $\theta \in (0, \theta^*)$, що і потрібно було встановити. □

Зауваження 8. На завершення зазначимо, що існування матриці $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, яка б задовольняла умову (6.9), є прямим наслідком ефекту Лаврентьєва: для заданої виродженої вагової функції ρ^0 простір $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним в ваговому просторі Соболєва W_{ρ^0}, а отже $H_{\rho^0} \neq W_{\rho^0}$ (див. твердження 1.1 в [5]).

Бібліографічні посилання

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 с.
2. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами.— К.: Наукова думка, 1988. — 324 с.
3. *Drabec P., Kufner A., Nicolosi N.* Nonlinear elliptic equations, singular and degenerate cases.— University of West Bohemia, 1996.
4. *Zeidler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applicaions.— IIA, IIB, Springer-Verlag, New York, 1990.
5. *Zhikov V. V.*, Weighted Sobolev spaces, Sbornik: Mathematics, No. 8, Vol. 189, 1998, P. 27–58.
6. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.*, Homogenization of degenerate elliptic equations, Siberian Math. Journal, No. 1, Vol. 49, 2006, P. 80–101.

Надійшла до редакції 23.12.2010