

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

В І С Н И К

Дніпропетровського університету

Серія: Моделювання

Вип. 1 № 8 Том 17 2009

Науковий журнал з проблем математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

Редакційна рада:

акад. Академії наук ВШ України, д-р фіз.-мат. наук, проф. М. В. Поляков (голова редакційної ради); акад. Академії наук ВШ України, д-р техн. наук, проф. М. М. Дронь (заст. голови); д-р фіз.-мат. наук, проф. О. О. Кочубей; д-р хім. наук, проф. В. Ф. Варгальок; чл.-кор. АПН України, д-р філос. наук, проф. П. І. Гнатенко; д-р фіз.-мат. наук, проф. О. Г. Гоман; д-р філол. наук, проф. В. Д. Демченко; д-р пед. наук, проф. Л. І. Зеленська; акад. НАН України, д-р техн. наук, проф. А. П. Дзюба; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. В. П. Моторний; чл.-кор. АПН України, д-р біол. наук, проф. Е. Л. Носенко; д-р філос. наук, проф. В. О. Панфілов; д-р біол. наук, проф. О. Є. Пахомов.; д-р іст. наук, проф. С. І. Світленко; акад. Академії наук ВШ України, д-р фіз.-мат. наук, проф. В. В. Скалозуб; д-р філол. наук, проф. Т. С. Пристайко; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. А. П. Травляєв; чл.-кор. Академії мед. наук України, д-р техн. наук, проф. Ю. Д. Шептун.

Дніпропетровськ
Видавництво Дніпропетровського
національного університету

*Друкується за рішенням вченої ради
Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара
згідно з затвердженим планом видань на 2009 р.*

Викладено результати наукових досліджень із сучасних питань математичної фізики, теорії оптимального керування рівняннями в частинних похідних, методів теорії нескаллярної оптимізації, а також їх застосування в задачах математичного моделювання природничих процесів.

Для наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

Изложены результаты научных исследований по современным вопросам математической физики, теории оптимального управления уравнениями в частных производных, методов теории нескаллярной оптимизации, а также по их применению в задачах математического моделирования физических процессов.

Для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакційна колегія:

акад. Академії ВШ України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (відп. редактор), д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Когут** (заст. відп. редактора), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Є. Белозьоров**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Кісельова**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Капустян**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. В. Капустян**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Ковалевський**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Наконечний**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Остапенко**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. В. Тичинін**, канд. фіз.-мат. наук, доц. **Ю. Л. Меньшиков**, канд. фіз.-мат. наук, доц. **А. В. Сясєв** (відп. секретар).

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. П. Тіман**

- © Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 2009
- © Видавництво Дніпропетровського університету, оформлення, 2009

УДК 519.6

АНАЛИЗ ТЕНДЕНЦИЙ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: devd@mail.ru*

Рассмотрены некоторые последние тенденции развития математического и численного моделирования, обусловленные как совершенствованием математических моделей и алгоритмов численного решения, так и беспрецедентным ростом производительности электронно-вычислительной техники. Показано, что изучение свойств численных алгоритмов целесообразно проводить на специальных тестовых примерах, имеющих аналитическое решение.

Ключевые слова. Математическая модель, численный метод, численная модель.

1. Введение

На протяжении последних нескольких десятилетий наблюдается беспрецедентный устойчивый рост интереса к математическому и численному моделированию, стимулируемый не менее беспрецедентным ростом возможностей вычислительной техники и ее повсеместным распространением. Во многих областях науки, техники и технологии рассматриваемые подходы стали доминирующими в научных исследованиях, а также при проектировании новых технологических процессов и оборудования. Кроме того, управление производственными процессами все чаще осуществляется на основе математических и численных моделей. И даже в тех областях, где указанные подходы еще не столь популярны, например, в гуманитарных науках, прослеживается явная тенденция к математизации подходов. Как результат роста популярности математического и численного моделирования существенно возросли и требования, предъявляемые к точности и эффективности расчета. Очевидно, что одним из путей повышения точности и эффективности прикладных расчетов является совершенствование применяемых математических моделей, однако этот путь связан, прежде всего, с развитием предметных областей, к которым относятся данные математические модели, модификация же самих моделей хотя и может дать существенный вычислительный эффект при использовании со специализированными алгоритмами, но применима в очень ограниченном числе случаев. Другим, не менее очевидным, путем совершенствования методики прикладных расчетов является развитие вычислительных алгоритмов. В этом направлении в последние десятилетия был достигнут существенный прогресс, выразившийся в появлении значительного числа как универсальных, так и специализированных алгоритмов. В настоящее

время число применяемых алгоритмов уже столь велико, что внутри численных методов возникла явно выраженная специализация, которая продолжает углубляться. В этой ситуации достаточно остро встал вопрос о "критериях качества" математических моделей, вычислительных алгоритмов и, в конечном итоге, проведенных расчетов. Как будет показано ниже, традиционные "критерии качества" уже не отвечают современным требованиям. Данная работа посвящена развитию методик оценки качества расчетных схем на основе численного эксперимента.

2. Выбор объекта исследования

Большое разнообразие вычислительных задач, возникающих в приложениях, значительные различия в их физической и математической сущности и, как следствие, громадное разнообразие алгоритмов решения этих задач делают практически невозможным рассмотрение универсальных критериев оценки их решений. Поясним эту мысль: до сих пор во многих областях естествознания уровень математических моделей таков, что актуальными являются оценочные расчеты, отражающие только качественную картину моделируемого процесса, в то же время численное моделирование в других областях, например, в ряде разделов механики сплошной среды, достигло предела точности вычислений компьютера. Во многих случаях остается принципиально неясным характер нелинейностей, определяющих структуру решения задачи, не всегда удается корректно учесть малые воздействия на исследуемые системы. Наконец, зачастую приходится моделировать явления, физическая природа, а, следовательно, и математические модели которых не совсем ясны, например, турбулентность.

3. Современное состояние вопроса

Количество публикаций, посвященных применению методов математического и численного моделирования в различных областях науки и техники, исчисляется десятками, если не сотнями тысяч, и, безусловно, столь велико, что не оставляет авторам настоящей работы ни малейшей надежды проследить какие-либо тенденции по публикациям. Личные научные интересы авторов касаются, в первую очередь, численных методов гидродинамики и теплообмена, но даже в этой, намного меньшей области, где нет столь существенных различий в уровне работ, проследить тенденции по публикациям чрезвычайно трудно, хотя такие попытки делались в обширных и достаточно фундаментальных монографиях [1, 6, 8, 9], оказавших заметное влияние на развитие указанной области. Таким образом, индуктивный подход к анализу — от частных тенденций к общим — в данном случае настолько затруднен, что применение его представляется нецелесообразным. Альтернативный дедуктивный подход к рассматриваемой проблеме не столь очевиден, но только он дает возможность проследить закономерности современного этапа развития математического и численного моделирования. Традиционно дедуктивный подход связывают с математическими методами исследования, поэтому применение его в рассматриваемой области представляется вполне естественным. Однако, как правило, дедуктивный подход используют для

анализа свойств определенной модели или алгоритма, в данной же работе предлагается применить его для анализа тенденций развития области.

Исторически вопрос об эффективности, или в более глобальной формулировке, о "качестве" алгоритма возник довольно давно, еще в начале эры машинных вычислений, и в течение достаточно долгого времени был ключевым вопросом вычислительной математики, поскольку для маломощных компьютеров того времени неэффективные алгоритмы были неприемлемы вообще. Следует отметить, что первые достаточно простые численные алгоритмы были тщательно исследованы как теоретически, так и путем численного эксперимента. К сожалению, в дальнейшем сложность вычислительных алгоритмов возрастала намного быстрее, чем развивались возможности их теоретического анализа, поэтому теоретические оценки эффективности алгоритмов в значительной мере утратили свое значение.

Поясним эту ситуацию. Для большинства алгоритмов, даже достаточно сложных, относительно легко получить оценку количества арифметических операций, используемых при расчете. Однако количество арифметических операций определяет скорость счета, а для получения оценки эффективности необходимо оценить еще и погрешность вычислений, именно в этом вопросе и возникли наибольшие трудности. Дело в том, что порядок аппроксимации, который представляется очевидной количественной мерой "близости" дискретной (расчетной) и непрерывной моделей, не является единственным фактором, определяющим погрешность расчета, на точность вычислений влияют также скорость сходимости, многочисленные и трудноучитываемые погрешности, вносимые на разных этапах алгоритма, и их взаимодействие, устойчивость расчетной схемы. Перечисленные факторы плохо поддаются теоретическому учету, особенно для сложных алгоритмов. Кроме того, погрешность практического расчета существенно зависит от программной реализации алгоритма, что составляет отдельную и очень существенную проблему как для численного моделирования, так и для вычислительной математики в целом.

Таким образом, возникла тенденция разделять теоретические оценки алгоритма и его экспериментальные исследования, относя вопрос об эффективности алгоритма преимущественно к последним. Наиболее полно и последовательно эта точка зрения была сформулирована в книге Д. Ван Тассела [5], где вопрос об эффективности алгоритма был рассмотрен как часть общей проблемы эффективности программного обеспечения. Этот подход принципиально отличался от классического теоретического подхода, доминировавшего в то время, поскольку он утверждал невозможность никакой другой реализации алгоритма кроме как в программном обеспечении и сводил эффективность алгоритма к составной части эффективности программного кода. Точка зрения Д. Ван Тассела отражала, прежде всего, опыт большого числа практикующих программистов и не была принята большинством математиков, работающих в области численных методов. Однако именно эта точка зрения предлагала простой и понятный выход из кризисной ситуации, вызванной усложнением расчетных алгоритмов. Методики тестирования программного обеспечения, о которых писал Д. Ван Тассел, достаточно просты и очевидны, поэтому идея тестирования программ с целью определения эффективности алгоритма приобрела большую популярность в среде программистов. Спра-

ведливости ради следует отметить, что эффективность программы зависит не только от эффективности алгоритма, но и от "качества" программной реализации, то есть, эффективности применяемых автором программы тех или иных приемов программирования. Уже во времена Д. Ван Тассела были известны многочисленные примеры, когда незначительные чисто программные усовершенствования, не затрагивающие алгоритм, приводили к резкому сокращению времени счета или значительному повышению точности расчета. Это и было основным возражением против подхода Д. Ван Тассела. Дискуссия о роли численного эксперимента на тестовых задачах для оценки "качества" алгоритмов, математических и численных моделей продолжается до сих пор, и вопрос о корректности такого подхода еще весьма далек от окончательного разрешения.

Вторым поворотным моментом в эволюции взглядов на методы исследования алгоритмов стал выход книги [3], в которой был рассмотрен вопрос об использовании в вычислительной практике алгоритмов, основанных на расходящихся разложениях в ряды, или алгоритмов, о сходимости которых ничего не известно. Основываясь на достаточно широкой и успешной практике прикладных инженерных и научных расчетов, авторы книги [3] сделали вывод о целесообразности использования таких алгоритмов в целом ряде случаев, когда результаты расчетов могут быть удостоверены тем или иным путем. Таким образом, в книге [3] вопрос вновь свелся к методам тестирования алгоритма.

Впоследствии было множество публикаций, посвященных эффективности численных алгоритмов, верификации результатов расчетов, тестированию алгоритмов и программ и, конечно, теоретическому анализу алгоритмов. Более того, практически в каждой работе, посвященной математическому и численному моделированию, эти вопросы затрагиваются в той или иной мере. Не имея возможности охватить в данном кратком обзоре всю массу упомянутых публикаций, сошлемся на монографии [2, 13, 14, 15], в которых рассматриваемые проблемы анализируются более подробно, но, в целом, следует отметить, что принципиального прогресса в данном направлении после выхода книг [3, 5] не наблюдалось, хотя были предложены отдельные высокоэффективные приемы и методики, а ряд других подходов получил существенное развитие.

4. Нерешенные задачи и цели настоящей работы

Как отмечалось выше, достаточно полный и последовательный анализ литературы, посвященной проблеме эффективности вычислительных алгоритмов, в рамках данной работы практически невозможен. Поэтому ограничимся анализом общих тенденций, проявившихся в вычислительной математике в последнее время. Как можно заключить из вышеизложенного, ситуация в вопросе об эффективности вычислительных алгоритмов запутана и противоречива. Существенным фактором, влияющим на рассматриваемую область, является стремительный рост возможностей вычислительной техники. Согласно закону Мура производительность вычислительных систем удваивается каждые 18 месяцев, а рост возможностей соответствующих пакетов

прикладных программ происходит еще быстрее вследствие совершенствования алгоритмов, в них используемых. Благодаря столь быстрому росту возникло даже мнение о том, что в настоящее время проблема эффективности вычислительных алгоритмов не является достаточно актуальной.

Покажем ошибочность этой точки зрения. Согласно закону Мура производительность вычислительной техники за последние 15 лет выросла примерно в 1000 раз. Это означает, что в наиболее сложных из существующих вычислительных задач — пространственных задачах — можно увеличить количество узлов сетки в 10 раз, то есть на порядок (если 15 лет назад в расчетах на персональном компьютере "хорошей" считалась сетка 50 50 50, а на более мощных системах от 150 150 150 до 200 200 200, то сейчас — данные взяты на середину 2008 года — сетка 500 500 500 вполне достижима на мощном персональном компьютере, а на системах большей мощности могут использоваться сетки от 1000 1000 1000 до 2000 2000 2000). Понятно, что в задачах, решавшихся 15 и более лет назад, это увеличение вычислительных возможностей позволило достигнуть буквально поразительного прогресса. Так сетки, применявшиеся 15 лет назад, позволяли более или менее точно рассчитывать эффекты геометрического масштаба порядка 0,1 размера области решения, а сетки, применяемые сейчас, предоставляют аналогичную возможность для эффектов масштаба 0,01—0,005 размера области. Но за те же 15 лет появились принципиально новые задачи, связанные с развитием микроэлектроники, микромеханики, микробиологии и, наконец, нанотехнологий, для которых соотношение характерного размера исследуемых эффектов к характерному размеру области на несколько порядков меньше, чем легко достижимые сейчас масштабы 0,01—0,005.

Таким образом, с появлением новых задач требования к производительности вычислительной техники только возросли, причем достаточно существенно, а вывод о том, что возможности вычислительной техники практически полностью удовлетворяют потребности в расчетах или близки к тому, следует признать опасной иллюзией. Причинами данного весьма распространенного заблуждения являются: значительный прогресс в классических технических задачах, сформулированных в 50–60-е годы прошлого века, а то и ранее; не исчерпание, но значительное уменьшение списка нерешенных задач математического и численного моделирования; быстрый рост инсталляционной базы вычислительной техники, сделавший ее очень доступной для проведения массовых расчетов; прогресс программного обеспечения, исключительная простота и легкость работы с ним по сравнению с тем, что было 15 и более лет назад.

Приведенные выше соображения показывают, что проблема эффективности численных методов, равно как и общая проблема эффективности математического и численного моделирования, еще весьма далеки от своего полного разрешения, несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этой области. Более того, проблема эта продолжает оставаться весьма актуальной. Конечно, в настоящее время несколько изменилось понятие эффективности — если 15 и более лет назад под эффективностью алгоритма понималось, прежде всего, минимальное время счета при сколько-нибудь приемлемой точности, то сейчас под эффективностью подразумевают корректность и высокую точ-

ность результатов, а вопрос времени уже не столь важен.

На заре развития вычислительной техники и численных методов потребности практики во многом сводили проблему эффективности численного моделирования к обеспечению адекватности расчета, то есть сравнению результатов численного расчета с результатами эксперимента. Важной тенденцией в развитии математического и численного моделирования уже на протяжении достаточно длительного времени является изучение явлений, экспериментальное исследование которых невозможно в силу тех или иных причин. Именно это обстоятельство обусловило поиск критерия адекватности численного решения, не связанного с физическим экспериментом. Следует отметить, что прогресс в данном направлении в настоящее время оставляет желать много большего. Хотелось бы отметить еще одну тенденцию: прогресс методов численного моделирования в последние десятилетия шел намного быстрее прогресса методов экспериментальных исследований, в результате чего в разные моменты времени, но к настоящему времени уже в подавляющем большинстве направлений науки и техники точность численного расчета превысила точность экспериментального исследования. Более того, сейчас типичной следует считать ситуацию, когда погрешность численного расчета может быть на несколько порядков меньшей, нежели погрешность соответствующего натурного или лабораторного эксперимента. В силу высказанных соображений использование экспериментальных данных для контроля точности численных расчетов представляется нелепым, в какой-то степени последние можно использовать лишь для оценки адекватности численного результата, да и то с известными оговорками.

Вышеперечисленные трудности, противоречия и проблемы стимулировали написание настоящей статьи, очевидной целью которой является выделение перспективных направлений развития математического и численного моделирования с учетом перечисленных выше неоднозначных тенденций развития таковых. Впервые авторы обратились к этим вопросам в работе [12], естественным логическим продолжением которой является настоящая статья.

5. Проблемы адекватности, точности и эффективности результатов численного моделирования

Рассмотрим традиционную схему математического и численного моделирования: "физическое явление — физическая модель — математическая модель — численный метод — численная модель — результаты численных расчетов" (справедливости ради следует отметить, что, как правило, эта схема в литературе приводится в усеченном виде, но приведенный вариант выделяет ряд особенностей, важных для анализа погрешностей). В литературе основное внимание при анализе приведенной логической схемы по непонятным причинам уделяется вопросам неединственности физических и, соответственно, математических моделей явлений и взаимоотношений между альтернативными моделями. Не умаляя методологического и общепhilosophического значения указанной проблемы, авторы настоящей статьи отнюдь не считают ее ключевой для развития математического и численного моделирования.

По мнению авторов, перманентные требования повышения точности расчетов, возникающие в современных научных исследованиях и при разработке новых технологий, делают ключевой проблему возникновения и накопления погрешности в рамках указанной схемы. Именно поэтому проведено разграничение этапов "математическая модель — численный метод — численная модель — результаты численных расчетов", ведь каждый из этих этапов исследования вносит в решение специфическую погрешность. Прежде чем рассматривать генерацию погрешности в указанной схеме, следует разрешить следующее классификационное противоречие: в схему расчета неизбежно входят полученные эмпирическим путем параметры и зависимости, отражающие свойства среды (физические, химические, геометрические и прочие), в которой происходит исследуемый процесс. Забегая вперед, укажем, что зачастую на современном этапе именно эти зависимости оказываются наиболее существенным источником погрешности, поскольку, как отмечалось выше, погрешности экспериментальных методов оказываются достаточно большими (а иногда и недопустимо большими) по сравнению с погрешностями, вносимыми на других этапах исследования.

Авторы настоящей работы считают правильным отнести определение упомянутых параметров и формирование указанных эмпирических зависимостей к этапу формирования физической модели явления, а не к математической модели, как это иногда делается. Приведенная классификация, однако, не снимает остроты возникшей проблемы [12]: общие математические модели отдельных классов физических явлений, в которых физические свойства среды отражены в виде формальных параметров, намного точнее, чем математические модели индивидуальных физических явлений из этих классов, включающих экспериментально определенные параметры и зависимости. Отметим, что аналитические решения строятся, как правило, для общих математических моделей, физические эксперименты проводятся только для индивидуальных физических явлений, а численные расчеты, вообще говоря, могут быть проведены в обоих случаях.

Таким образом, тезис о том, что точность численного расчета не может превышать точность экспериментальных данных, представляется не всегда правильным. Зачастую при моделировании индивидуальных физических явлений возникает парадоксальная ситуация, когда в математическую модель включают результаты эксперимента, а затем для определения адекватности и точности результатов численного решения их сравнивают с тем же или аналогичным экспериментом. Очевидно, что общая погрешность такого численного результата определяется преимущественно погрешностью физического эксперимента, а любые выводы о точности численного расчета в присутствии куда как более значительной погрешности физического эксперимента представляются весьма сомнительными. То есть, в данном случае речь может идти только об адекватности подхода, но никак не о его точности.

С точки зрения авторов настоящей статьи целесообразно тестирование численных подходов на аналитических решениях. Результаты такого тестирования более информативны, позволяют прямо судить о точности численного подхода, не требуют разделения на погрешность численного решения и общую погрешность численного результата. Таким образом, в схеме "физи-

ческое явление— физическая модель— математическая модель— численный метод— численная модель— результаты численных расчетов" удастся выделить погрешности, возникающие на всех промежуточных стадиях: погрешность физической модели определяется не только как погрешность, вносимая в результате неизбежного упрощения физических представлений, но и как погрешность экспериментальных данных; погрешность математической модели понимается в традиционном смысле. Если погрешность физической модели, в принципе, может быть оценена, то погрешность математической модели с трудом поддается формализации. Для оценки последней можно рекомендовать лишь сравнительный анализ результатов аналитических решений, конкретизированных для специально подобранных физических экспериментов, с результатами этих экспериментов, что, однако, возможно лишь при наличии достоверных оценок погрешности самих экспериментов. Погрешности численных алгоритмов достаточно хорошо изучены в соответствующей теории, поэтому не будем на них останавливаться подробно, отметим лишь, что обширная вычислительная практика заставляет считать теоретические оценки большинства численных алгоритмов недостаточно точными, особенно для нелинейных задач. При численном решении сложных задач, требующем совместного использования нескольких разноплановых алгоритмов, теоретические оценки точности отсутствуют совсем. С другой стороны, при исследовании точности численного алгоритма путем численного эксперимента (применяя предложенное выше тестирование на специально подобранных аналитических решениях, которые не обязательно должны быть актуальны, то есть, иметь определенный физический смысл) погрешность численного алгоритма подменяется погрешностью численной (компьютерной) модели, которая включает в себя еще и вычислительные погрешности программной реализации. Как отмечалось выше, корректность такого подхода подвергается обоснованным сомнениям на протяжении уже более 30 лет, что, впрочем, не препятствует его популярности. В защиту данного подхода можно высказать несколько аргументов:

1. Погрешность численной модели, определенную в численном эксперименте, никак не следует рассматривать как абсолютную количественную меру погрешности использованного численного алгоритма, а можно использовать только лишь для сравнения точности и эффективности алгоритмов.
2. Численный алгоритм без программной реализации является сложным абстрактным объектом, в большинстве практически важных и сложных случаев почти не поддающимся теоретическому исследованию, то есть альтернативы численному эксперименту фактически нет.
3. Стандартизация и унификация приемов прикладного программирования в настоящее время достигли такого уровня, что не приходится ожидать сколько-нибудь существенных отличий в точности или эффективности расчета в зависимости от программной реализации. Хотя приведенные соображения и не могут служить доказательством корректности обсуждаемого подхода, авторам настоящей работы они кажутся доста-

точно убедительными.

6. Другие проблемы математического и численного моделирования

Наиболее широко известной и наиболее исследуемой в настоящее время является проблема нелинейности математических моделей. Традиционно в математическом моделировании выделяют сильные и слабые нелинейности. Первые могут привести к неединственности решения, появлению неустойчивостей и бифуркаций, а затем и хаотическому поведению исследуемой системы, возникновению разрывов решения. Трудности, связанные с преодолением перечисленных проблем, общеизвестны, поэтому не будем на них останавливаться подробно. Отметим только, что вблизи неустойчивых состояний и точек бифуркации такие системы становятся весьма чувствительны к малым возмущениям, в том числе и к возмущениям, вносимым численным алгоритмом, поэтому в ряде случаев вычислительная проблема сильной нелинейности тесно связана с проблемой корректного учета малых возмущений, которая будет рассмотрена ниже. Однако даже в случае, когда нелинейность не приводит к перечисленным выше явлениям, она все равно существенно удлиняет процедуру расчета, а иногда и снижает его точность.

Другой важной проблемой, часто связанной с проявлением сильной нелинейности, представляются задачи с малым параметром при старшей производной. Такие задачи естественным образом возникают в гидроаэродинамике больших скоростей. Малый параметр при старшей производной приводит к появлению пограничных слоев, то есть тонких зон с большими поперечными градиентами искомых величин. Два основных подхода — адаптивные сетки и сегментация области решения — позволяют успешно преодолевать трудности, связанные с малым параметром при старшей производной, однако оба указанных подхода являются исключительно ресурсоемкими, поэтому в настоящее время прогресс в данном направлении почти полностью связан с ростом возможностей вычислительной техники.

Современные численные подходы не предусматривают для анализа сильных нелинейностей специальных средств. В результате аппроксимации нелинейная задача сводится к линеаризованному или нелинейному дискретному аналогу, обладающему некоторыми специфическими свойствами, и остается только надеяться, что "поведение" дискретного аналога будет соответствовать "поведению" моделируемой системы. Например, в неустойчивом состоянии вблизи точки бифуркации поведение системы определяется малыми, иногда случайными, иногда систематическими физическими возмущениями. Однако возмущения, неизбежно вносимые погрешностью численного решения, могут оказаться сравнимыми по величине или даже большими, нежели физические возмущения, определяющие поведение исследуемой системы, а поскольку погрешность численного решения зачастую имеет систематический характер, то весьма высока вероятность получения недостоверных результатов моделирования поведения неустойчивой системы вблизи точки бифуркации.

В вычислительной гидромеханике и вычислительном тепломассообмене численные алгоритмы, применяемые при решении сильно нелинейных задач, прошли "естественный отбор", и алгоритмы, дающие неадекватные результаты, были просто отброшены. Расширение спектра сильных нелинейностей в прикладных задачах, происходящее в настоящее время, и сжатые временные рамки большинства исследований не дают возможности проводить "естественный отбор" алгоритмов для других направлений. Поэтому авторами настоящей работы предложен альтернативный подход. Полагая, что для разных численных методов погрешности численного решения являются независимыми и могут трактоваться как случайные величины, авторы утверждают, что, если численные решения сильно нелинейной задачи существенно различными численными методами (например, методами конечных разностей, конечных элементов и граничных элементов) совпадают с точностью до специально выбранной достаточно малой величины, то это существенно повышает степень достоверности таких результатов. В противном случае результаты таких расчетов представляют широкие возможности для анализа и калибровки расчетных схем. Несмотря на кажущуюся очевидность приведенного утверждения, вычислительная практика показывает, что не только не происходит массового дублирования решения нелинейных задач альтернативными численными методами, но даже трудно найти примеры такого подхода в отдельных единичных исследованиях. Причины этой ситуации совершенно очевидны — разработка и поддержание нескольких альтернативных комплексов прикладных программ слишком трудоемки и дорогостоящи. Тем не менее, авторы убеждены, что без широкого применения данного подхода существенного прогресса в вопросах численного решения сильно нелинейных задач достигнуто не будет.

Слабые нелинейности не представляют таких потенциальных угроз для численного анализа, как их сильные аналоги, однако традиционно в вычислительной практике со слабыми нелинейностями связаны неявные и не всегда достаточно корректные линеаризации, проследить влияние которых в сложном вычислительном процессе не представляется возможным. С другой стороны, в большинстве случаев слабые нелинейности связаны с экспериментально определяемыми свойствами среды, то есть, потенциально являются источниками весьма значительной погрешности, вносимой в расчетную схему извне. Поскольку одним из магистральных направлений развития большинства отраслей науки на протяжении последних двух столетий является уточнение экспериментально определяемых характеристик, проблеме слабых нелинейностей и особенно связанных с ними обратных задач следует считать фундаментальной проблемой современного математического и численного моделирования. К сожалению, до настоящего времени проблеме слабых нелинейностей должного внимания не уделялось. В вычислительном плане проблема слабых нелинейностей связана с проблемой корректного расчета малых возмущений, о которой будет сказано ниже.

Трудности, возникающие при учете малых возмущений и расчете эффектов, локализованных в пространстве и во времени, представляют собой следующую ключевую проблему развития математического и численного моделирования. Следует отметить, что проблема эта общеизвестна на протяжении практически всей истории математического и численного моделирования, од-

нако особого внимания она не привлекала, поскольку малые возмущения мало влияют на интегральные характеристики исследуемой системы, за исключением нескольких специальных случаев, например, распределенных малых воздействий. Изменению ситуации способствовали три тенденции, проявившиеся в последнее время:

- 1) резкое ужесточение требований к сложности расчетов, заставляющее учитывать все более малые эффекты;
- 2) развитие микроэлектроники, микробиологии и микромеханики, а затем и нанотехнологий, для которых малые и локализованные эффекты являются основными объектами исследования;
- 3) исследования поведения неустойчивых систем вблизи точки бифуркации.

В современном математическом и численном моделировании даже сформировалось отдельное направление, называемое теорией многомасштабных задач (multiscale problems), очевидным образом связанное с рассматриваемой проблемой и являющееся, по некоторым оценкам, наиболее быстроразвивающимся направлением в данной области науки. Выше уже упоминались связи рассматриваемой проблемы с другими проблемами развития математического и численного моделирования. В вычислительном плане основная трудность при расчете малых и локализованных эффектов заключается в том, что численные методы, основанные на дискретизации области решения, — методы конечных разностей и конечных элементов — принципиально не допускают расчета эффектов подсеточного масштаба (масштаба, меньшего, чем размеры разностных ячеек или конечных элементов), а сколько-нибудь приемлемую точность расчета обеспечивают для объектов, как минимум, в пять раз больших характерных размеров дискретизации.

Авторы настоящей работы видят пути разрешения данной проблемы в использовании вычислительной теории потенциала [10, 11, 12], а также в построении специальных асимптотических разложений [4, 7]. Действительно, в [10, 11] показано, что в вычислительной теории потенциала, основанной на интегральных представлениях решений, понятия подсеточного масштаба не возникает вовсе, однако для эффективного решения задач рассматриваемых классов алгоритмы указанной теории нуждаются в дополнительной разработке. То же самое можно сказать и об использовании специальных асимптотических разложений. В случае распределенных малых воздействий, которые, например, имеют место в гидродинамике многофазных сред, в современной теории математического и численного моделирования отдают предпочтение методам гомогенизации. Не оспаривая полезность и эффективность такого подхода, авторы хотели бы отметить большую перспективность прямых численных расчетов, основанных на уже упоминавшихся методах вычислительной теории потенциала [10, 11].

Наконец, к последней из рассмотренных в настоящей работе проблем хотелось бы отнести многочисленные систематические ошибки, которые в современных условиях требуют интенсивного исследования и, если не устранения, то, по крайней мере, значительного уменьшения. К подобным ошибкам

следует отнести: излишние упрощения зависимостей, описывающих свойства среды и другие физические параметры (о чем уже говорилось в связи со слабыми нелинейностями), снесение на конечное расстояние граничных условий в бесконечно удаленной точке, что регулярно имеет место при решении внешних задач, схематизацию формы области решения, пренебрежение относительно малыми влияниями удаленных в пространстве и во времени объектов и процессов. Необходимо отметить, что конечной целью всех перечисленных упрощений является облегчение процедуры численного решения, но производятся они на уровне математической модели. Все перечисленные выше источники погрешности носят явно выраженный систематический характер, следовательно, генерируемые ими ошибки имеют тенденцию к накоплению. Как и многие из обсуждавшихся выше, указанные обстоятельства в течение долгого времени считались "несущественными", и только последнее резкое ужесточение требований к точности численных расчетов заставило всерьез обратить на них внимание. По той же причине, несмотря на значительное количество отдельных, разрозненных исследований, упоминания о которых можно найти в книгах [1, 6, 8, 9], данная проблема была впервые сформулирована в общем виде только в работе [12]. В той же работе авторы указали на применение вычислительной теории потенциала как основной путь преодоления рассматриваемых трудностей, однако представляется целесообразным проведение целого ряда теоретических и методологических исследований, в том числе и при помощи численного эксперимента, для определения степени влияния указанных факторов на общую точность результатов численного моделирования и оценки эффективности различных путей преодоления негативных эффектов этого влияния.

Приведенный перечень проблем развития математического и численного моделирования отнюдь не претендует на полноту и универсальность, а призван указать пути развития данной отрасли науки в связи с переходом от "экстенсивного" развития (когда развитие происходит за счет расширения поля применения дисциплины, увеличения числа математических моделей и формулируемых в их рамках задач) к "интенсивному" развитию, предполагающему, в первую очередь, усовершенствование существующих математических моделей и численных методов.

7. Концепция вычислительной модели

Несмотря на сделанный вывод о преобладающем значении совершенствования существующих подходов, дальнейшее развитие математического и численного моделирования, безусловно, невозможно без появления новых математических моделей сложных систем, плохо поддающихся исследованию в настоящее время. Для таких систем существенным фактором являются неясность или незавершенность физической модели, когда некоторые данные и параметры либо оказываются гипотетическими, либо заданы несколькими альтернативными представлениями, либо вообще неизвестны. То есть речь идет о системе, находящейся в стадии научного исследования. В обычных научных исследованиях для уточнения физической модели проводятся наблюдения, натурные и лабораторные эксперименты, но для сложных систем,

а особенно систем уникальных, например, земной атмосферы, космических объектов и тому подобных, такой подход оказывается невозможным. Для таких систем можно осуществить искомое уточнение путем решения некоторых обратных задач или сравнивая результаты наблюдений и измерений с предсказанными на основе численных расчетов в рамках альтернативных математических моделей. Понятно, что такая схема исследования выходит за рамки приведенной выше схемы "физическое явление — физическая модель — математическая модель — численный метод — численная модель — результаты численных расчетов". Поэтому авторами настоящей работы предложена концепция вычислительной модели, которая объединяет в себе набор альтернативных математических моделей, соответствующих разным физическим представлениям, программные реализации численных алгоритмов (желательно нескольких) решения прямых и обратных задач, оцифрованные результаты экспериментальных исследований. Вычислительная модель обеспечивает взаимодействие между перечисленными выше элементами с использованием средств искусственного интеллекта, а также обеспечивает интерфейс для внесения данных новых экспериментов и наблюдений. Вычислительная модель должна обеспечивать уточнение физических и математических моделей на основе поступающих данных, то есть обеспечивать развитие системы. Конечно, вычислительная модель намного сложнее, чем распространенные сейчас численные модели, и требует намного больших компьютерных ресурсов, однако вычислительная модель представляется универсальным инструментом автоматизации научного исследования и практически не имеет альтернативы при анализе сложных систем.

8. Выводы

Резкое усиление требований к точности результатов математического и численного моделирования, повсеместное распространение численного моделирования в практике инженерных и научных исследований, появление настоятельной необходимости в моделировании сложных систем существенно изменили парадигму развития математического и численного моделирования. Вывод о переходе к "интенсивному" развитию в современном математическом и численном моделировании уже был сделан выше. Также выше был сделан вывод о необходимости перехода от математического и численного моделирования к вычислительным моделям. В связи с появлением новых целей развития дисциплины необходимо проведение обширных методологических исследований, которые обеспечили бы выработку эффективных критериев определения достоверности результатов математического и численного моделирования. Перечисленные проблемы развития математического и численного моделирования столь тесно связаны между собой, что было бы неверным ожидать успеха в решении одной из этих проблем без общего прогресса в решении остальных.

Важным принципиальным выводом настоящей работы является заключение о превалирующей роли численного эксперимента в развитии не только численных методов, но и математических моделей.

9. Дальнейшее развитие исследований в данном направлении

Среди вопросов, рассмотренных в настоящей статье, не нашли должного отражения проблемы развития численных методов, что, вероятно, станет предметом следующих работ авторов. Не проанализированы также и вопросы, связанные с численной реализацией математических моделей и численных алгоритмов, которые, безусловно, важны для реализации численных моделей, но с этой точки зрения практически не освещены в литературе. Принципиальным последующим моментом развития данного направления, по мнению авторов, станет массовое внедрение численных моделей сначала в инженерно-техническую деятельность, а затем и в другие области деятельности человека. Для этого этапа станет характерным предъявление еще более жестких требований к достоверности результатов моделирования процессов, а также требований к эффективности численного моделирования, что, конечно, потребует дальнейшего развития идей, изложенных в данной работе.

Было бы целесообразно проведение специальных методических исследований и создание общей концепции вычислительной модели с разработкой компьютерного прототипа на примере какого-либо достаточно хорошо изученного раздела механики жидкости или теории тепломассообмена.

Библиографические ссылки

1. *Андерсон Д.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Танненхил, Р. Плетчер. — М. : Мир.— 1990, Т. 1.—364 с., Т. 2.— 332 с.
2. *Ахо А.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М. : Мир.— 1979.— 536 с.
3. *Блехман И. И.* Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. — М. : Наука, 1983.— 328 с.
4. *Бразалук Ю. В.* Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник ХНУ. — 2005. — № 703. — С. 50–66.
5. *Ван Тассел Д.* Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ / Д. Ван Тассел. — М. : Мир.— 1985.— 332 с.
6. *Вычислительные методы в динамике жидкостей.* — М. : Мир, 1991, Т. 1.— 504 с., Т. 2.—552 с.
7. *Евдокимов Д. В.* Расчет стационарных температурных полей в областях с малыми возмущениями границы / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Т. И. Тарасова // Диференціальні рівняння та їх застосування, Д. : ДНУ. — 2006. — С. 167–176.
8. *Оран Э.* Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Борис. — М. : Мир.— 1990.— 660 с.
9. *Пейре Р.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. — Л. : Гидрометеиздат.— 1986.— 352 с.
10. *Поляков Н. В.* Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вестник ДНУ, Сер. Механика. — 2006. — Ч. 1, № 2/1. — С. 7–25.
11. *Поляков Н. В.* Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вестник ДНУ, Сер.Механика. — 2006. — Ч. 2, № 2/1. — С. 25–42.

12. *Поляков Н. В.* Современные тенденции развития вычислительной гидромеханики / Н. В. Поляков, А. А. Кочубей, Д. В. Евдокимов // Прикладні проблеми аерогідромеханіки та теплопереносу. — 2008. — С. 12–17.
13. *Bentley J. L.* Writing of efficient programs. — Prentice-Hall : New Jersey.— 2000, 183 p.
14. *Greene D. H., Knuth D. E.* Mathematics for the analysis of algorithms. — Birkhauser : Boston.— 1990, 139 p.
15. *Parberry I., Gasarch W.* Problems of algorithms. — Prentice-Hall : New Jersey.— 2002, 268 p.

Надійшла до редакції 01.09.2009

УДК 517.9

**ПРО ДОДАТНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ
РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ ТИПУ
КАРАТЕОДОРІ¹**

О. В. Капустян*, В. Я. Данілов**

** Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
Київ 03022. E-mail: alexkar@univ.kiev.ua**** Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
Київ 03022. E-mail: danilov@ukr.net*

Для нелінійного рівняння реакції-дифузії з правою частиною типу Каратеодорі, умови на яку не забезпечують єдиність розв'язку задачі Коші, доведено глобальну розв'язність у класі сумовних із квадратом функцій, що набувають невід'ємних значень.

Ключові слова. Рівняння реакції-дифузії, невід'ємні розв'язки, умови розв'язності.

1. Вступ

Як відомо, для багатьох нелінійних еволюційних рівнянь математичної фізики важливим є доведення того, що розв'язок із початковими даними із заданої підмножини фазового простору залишається в цій множині для всіх $t \geq 0$ (рівняння з інваріантною областю). В класі систем типу реакції-дифузії найвідомішими прикладами є рівняння Ходгкіна-Хаслі, що описують передачу нервових імпульсів, рівняння Смоллера в теорії надпровідності, рівняння теорії горіння, рівняння Білоусова-Жаботинського в хімічній динаміці, дифузійні системи типу Лотки-Вольтерра та багато інших [1]. При цьому в усіх перерахованих задачах інваріантна область знаходиться завдяки явно заданим коефіцієнтам поліноміальної правої частини. Частинним випадком цієї задачі є доведення розв'язності в класі невід'ємних функцій. У випадку гладкого по фазовій змінній нелінійного доданка найбільш загальні результати щодо існування невід'ємного розв'язку були отримані в [2]. Для систем із негладкою по фазовій змінній правою частиною виду $f = f(u)$ відповідні результати одержані в [3]. Проте значну кількість прикладних задач, зокрема і деяких з названих класичних систем, доставляють приклади математичних моделей, в яких нелінійний доданок $f = f(x, u)$ є відображенням типу Каратеодорі. Саме з'ясуванню умов, за яких рівняння реакції-дифузії з такою нелінійністю допускають невід'ємні розв'язки, і присвячена дана робота.

¹Робота виконана за фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень, грант No. 29.1/025

2. Постановка задача і допоміжні результати

Розглядається задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a\Delta u(t, x) - f(x, u(t, x)) + h(x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u(t, x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

де константа $a > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $h \in L^2(\Omega)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — функція типу Каратеодорі, тобто

$$\begin{aligned} f(x, \cdot) : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \text{ — неперервна для м. в. } x \in \Omega, \\ f(\cdot, u) : \Omega &\mapsto \mathbb{R} \text{ — вимірна для всіх } u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

і виконані такі умови:

$$\left. \begin{aligned} \exists C_1, C_2 > 0, \alpha > 0, p \geq 2 \forall u \in \mathbb{R} \text{ для м. в. } x \in \Omega, \\ |f(x, u)| \leq C_1(1 + |u|^{p-1}), \quad f(x, u)u \geq \alpha|u|^p - C_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Надалі $a, \Omega, C_1, C_2, \alpha, p$ будемо називати константами задачі (2.1).

Фазовим простором задачі (2.1) є простір $L^2(\Omega)$, норму і скалярний добуток в якому будемо позначати $\|\cdot\|$ і $(\cdot, \cdot)$ відповідно.

Оскільки в силу умов (2.2) $|f(x, u)|^q \leq \tilde{C}_1(1 + |u|^p)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то маємо таке означення розв'язку (2.1):

Означення 1. Функція $u = u(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega))$ називається розв'язком (2.1) на $(0, T)$, якщо для довільних $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $\eta \in \mathbb{C}_0^\infty(0, T)$

$$-\int_\tau^T (u, v)\eta_t dt + \int_\tau^T (a((u, v)) + (f(x, u), v) - (h, v))\eta dt = 0. \quad (2.3)$$

Відомо [1], що будь-який розв'язок задачі (2.1) належить $\mathbb{C}([0, T]; L^2(\Omega))$, тому природним класом глобальної розв'язності задачі (2.1) є функціональний клас

$$W = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega)) \cap \mathbb{C}([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Теорема 1. [1] Для довільних $u_0 \in L^2(\Omega)$ задача (2.1) за умов (2.2) має принаймні один розв'язок у класі W , для якого $u(0) = u_0$.

Крім того, для довільного $u \in W$ - розв'язку (2.1) справедливі оцінки:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 + a \int_s^t \|u(\tau)\|_{H_0^1}^2 d\tau + 2\alpha \int_s^t \|u(\tau)\|_{L^p}^p d\tau \leq \\ \|u(s)\|^2 + C_3(t-s)(\|h\|^2 + 1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(s)\|^2 + \int_s^t (h, u(p)) dp + C_4|\Omega|(t-s), \quad (2.5)$$

$\forall t \geq s, t, s \in [0, T]$, причому додатні константи C_3, C_4 залежать лише від констант задачі (2.1).

Покладемо

$$H = \{u \in L^2(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ для м.в. } x \in \Omega\}.$$

Основною метою роботи є з'ясування умов, за яких для довільних $u_0 \in H$ існує принаймні один розв'язок $u = u(x, t)$ задачі (2.1) з $u(0) = u_0$, для якого

$$u(t) \in H \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

Для цього будемо конструювати апроксимативні задачі для (2.1), праві частини яких у певному сенсі збігаються до правої частини (2.1), і при цьому є гладкими функціями, що задовольняють умови з [2].

З цією метою розглянемо послідовність задач (2.1) (будемо позначати їх $(2.1)_n$, $n \geq 0$, $(2.1)_0 = (2.1)$), де замість функцій $f(x, u)$, $h(x)$ стоять функції $f_n(x, u)$, $h_n(x)$ відповідно, що мають такі властивості: $\forall n \geq 1$ f_n задовольняє умови (2.2) з константами, що не залежать від n і для довільних $A > 0$, $\theta \in L^2(\Omega)$

$$\left. \begin{aligned} \sup_{|v| \leq A} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f_n(x, v) - f(x, v)| &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega} (h_n(x) - h(x))\theta(x)dx &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Тоді з теореми 1 для довільних $n \geq 0$, $u_0^n \in L^2(\Omega)$ задача $(2.1)_n$ має принаймні один розв'язок у класі W .

Наступний результат є аналогом теореми про неперервну залежність від початкових даних і дозволить здійснювати граничний перехід в апроксимативних задачах.

Теорема 2. [3],[4] *Нехай $\{u^n\} \subset W$ — послідовність розв'язків задач $(2.1)_n$, причому $u^n(0) \rightarrow u_0$ слабо в $L^2(\Omega)$. Нехай задана послідовність $\{t_n\} \subset [0, T]$ така, що $t_n \rightarrow t_0 \in [0, T]$. Тоді існує $u \in W$ — розв'язок (2.1) такий, що $u(0) = u_0$ і принаймні по підпослідовності $u^n(t_n) \rightarrow u(t_0)$ слабо в $L^2(\Omega)$. Якщо $t_0 \in (0, T)$, то по підпослідовності $u^n(t_n) \rightarrow u(t_0)$ сильно в $L^2(\Omega)$. Якщо ж $u^n(0) \rightarrow u_0$ сильно в $L^2(\Omega)$, то для $t_n \searrow 0$ по підпослідовності $u^n(t_n) \rightarrow u_0$ сильно в $L^2(\Omega)$.*

3. Основний результат

Перед формулюванням основного результату наведемо допоміжну лему, що дозволить стверджувати властивість (2.6).

Лема 1. *Нехай для задачі виконані умови (2.2), $f(x, \cdot) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ для м. в. $x \in \Omega$,*

$$f'_u(x, u) \geq -C, \quad (3.1)$$

$$-f(x, 0) + h(x) \geq 0 \text{ для м. в. } x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Тоді для довільних $u_0 \in H$ існує єдиний розв'язок $u = u(x, t)$ задачі (2.1) з $u(0) = u_0$, для якого $u(t) \in H \quad \forall t \in [0, T]$.

Теорема 3. Нехай виконані умови (2.2) і наступні:

$$\forall \epsilon > 0 \forall A > 0 \exists \delta > 0 \forall u, v, |u| \leq A, |u - v| < \delta$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x, u) - f(x, v)| < \epsilon, \quad (3.3)$$

$$-f(x, 0) + h(x) \geq 0 \text{ для м. в. } x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Тоді для довільних $u_0 \in H$ існує принаймні один розв'язок $u = u(x, t)$ задачі (2.1), $u(0) = u_0$, для якого $u(t) \in H \forall t \in [0, T]$.

Доведення. Для цього для кожного $k \geq 1$ покладемо

$$f_k(x, u) = \begin{cases} f(x, u), & |u| \leq k, \\ f(x, k)(\frac{u}{k})^{p-1}, & u > k, \\ f(x, -k)(-\frac{u}{k})^{p-1}, & u < -k. \end{cases}$$

Тоді f_k — функція Каратеодорі, і $\forall A > 0$

$$\sup_{|u| \leq A} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f_k(x, u) - f(x, u)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Нехай $\rho_\epsilon \geq 0$ — стандартна регуляризуюча послідовність. Означимо функції

$$f_k^\epsilon(x, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(s) f_k(x, u - s) ds.$$

В силу умови (3.3) існує $\epsilon_k \in (0, 1)$, $\epsilon_k \rightarrow 0$ таке, що $\forall u, |u| \leq k, \forall s, |u - s| < \epsilon_k$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f_k(x, u) - f_k(x, s)| \leq \frac{1}{k}.$$

Покладемо $f^k(x, u) = f_k^{\epsilon_k}(x, u)$. За побудовою $\forall k \geq 1 \quad f^k(x, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Тоді легко показати, що для всіх $k \geq k_0$, де k_0 залежить лише від констант задачі (2.1), справедливі наступні твердження:

$$\forall A > 0 \quad \sup_{|u| \leq A} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f^k(x, u) - f(x, u)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\|f^k(x, u)\| \leq D_1(1 + |u|^{p-1}), \quad f^k(x, u)u \geq \beta|u|^p - D_2, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f^k(x, u)}{\partial u} \geq -D_3(k),$$

де $D_3(k)$ — невід'ємне число, своє для кожного $k \geq k_0$, а додатні константи $D_1, D_2 \geq C_2, \beta$ не залежать від k .

Тепер для кожного $k \geq 1$ маємо

$$f^k(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\epsilon_k}(s) f(x, -s) ds.$$

Покладемо

$$h^k(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\epsilon_k}(s) (f(x, 0) - f(x, -s)) ds,$$

$$F^k(x, u) = f^k(x, u) + h^k(x).$$

Тоді

$$-F^k(x, 0) + h(x) \geq 0.$$

Тепер при фіксованих $k > 1$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a \Delta u(t, x) - F^k(x, u(t, x)) + h(x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u(t, x)|_{x \in \partial \Omega} = 0, & u(0, x) = u_0(x) \in H. \end{cases} \quad (3.6)$$

Оскільки $|h^k(x)| \leq \frac{1}{k}$, то для F^k виконуються умови (3.5). Отже, задача (3.6) має єдиний розв'язок $u^k(x, t) \geq 0$ в класі W і в силу теореми 2 $\forall t \in [0, T]$ $u^k(t) \rightarrow u(t)$ в $L^2(\Omega)$, де $u(\cdot)$ — розв'язок (2.1), $u(0) = u_0$, для якого в силу замкненості H маємо $u(t) \in H \forall t \in [0, T]$. Теорема доведена. $\square$

Наведемо приклад, який ілюструє, що якщо в умовах теореми не вимагати єдиності розв'язку задачі Коші, то можуть існувати розв'язки, що не мають властивості (2.6). Для цього розглянемо задачу (2.1) з $a = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $T = 1$, $h(x) \equiv 0$,

$$f(x, u) = \begin{cases} -4u - 3(\sin 2x)^{1/3}u^{2/3}, & u \in [0, 1], \\ (-4 - 3(\sin 2x)^{1/3})u + u(u^2 - 1), & u \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Тоді f — функція Каратеодорі і виконані умови (2.2), (3.3) і $f(x, 0) = 0$, тобто виконуються всі умови теореми. Покладемо $u_0(x) = 0 \in H$. Тоді $u(t, x) \equiv 0$ — очевидний розв'язок (2.1) із класу H . Функція $u(t, x) = t^3 \sin 2x$ також розв'язок (2.1) на $(0, 1)$. Проте, $\forall t \in (0, 1)$ $u(t) \notin H$.

Бібліографічні посилання

1. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York : Springer, 1988. — 600 с.
2. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. — Providence : AMS, 2002. — 400 с.
3. *Kapustyan O. V., Valero J.* On the Kneser property for the complex Ginzburg-Landau equation and the Lotka-Volterra system with diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2009. — № 357. — С. 254–272.
4. *Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O. V. Kapustyan, V. S. Melnik, J. Valero, V. V. Yasinsky. — К. : Наукова думка, 2008. — 215 с.

Надійшла до редакції 01.09.2009

УДК 519.6

ПРО СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ОБЛАСТІ ОДНОГО
КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

О. П. Когут

*Інститут прикладного системного аналізу НАН України та МОН України,
НТУУ "КПІ корп.35, просп. Перемоги, 37, Київ. E-mail: kogut_olga@bk.ru*

Для розглянутого класу задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі означене поняття стійкості такої задачі відносно збурень області. Запропоновані достатні умови на збурення області, за яких стійкість розглянутої задачі має місце.

Ключові слова. Збурення області, Моско-збіжність просторів Соболева, керування в коефіцієнтах, задача Діріхле, умови стійкості.

1. Вступ

Зазвичай, математична модель оптимізаційної задачі (надалі *ОСР*) складається з декількох незалежних математичних об'єктів: рівняння стану, обмеження на стан системи та керування, функціоналу якості. Для систем з розподіленими параметрами кожна з цих складових залежить від області Ω , на якій вивчається об'єкт керування. Отже, якщо область Ω змінюється, то приходимо до абсолютно іншої задачі оптимального керування *ОСР*(Ω), можливо з іншими обмеженнями, іншим функціоналом якості і іншою крайовою задачею.

Нехай послідовність множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ збігається в деякому сенсі до Ω . Тоді, виходячи з класичного підходу (див., наприклад, [6, 7, 10, 12, 13]), оптимізаційну задачу *ОСР*(Ω) називають стійкою відносно заданого збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω , якщо послідовність оптимальних пар збурених задач *ОСР*(Ω_ε) збігається (в певній топології) до пари, яка є оптимальною для вихідної задачі *ОСР*(Ω). Проте оптимальну пару не можна назвати вичерпною та всебічною характеристикою оптимізаційної задачі. Як правило, повна ідентифікація задачі оптимального керування (включаючи функціонал якості, рівняння стану та існуючі обмеження на керування і стан) за допомогою самого тільки оптимального розв'язку є неможливою. Більше того, згаданий метод дослідження на стійкість не працює у випадку, коли оптимального розв'язку в задачі може не існувати [6] або коли ці розв'язки мають неklasичний, неваріаційний характер [5].

У даній роботі розглянуто клас задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі з так званими узагальнено-соленоїдальними керуваннями. Для такого класу задач означено поняття Моско-стійкості відносно збурень області, яке включає в

себе Моско-стійкість множини допустимих пар збурюваної задачі та відповідні властивості функціоналів якості. Ставиться за мету отримати достатні умови такої стійкості. Показано, що основу таких умов складають так звані збурення в хаусдорфовій топології доповнень, запропоновані Бакуром (див. [6]). Досліджено варіаційні властивості Моско-стійких задач оптимального керування. Отримані результати можуть служити основою для побудови субоптимальних керувань у задачах із нерегулярними областями та областями складної форми.

2. Постановка задачі

Нехай Ω є фіксованою відкритою підмножиною певної обмеженої відкритої множини $D \subset \mathbb{R}^n$ з регулярною границею.

Для заданих $z_\partial \in L_p(D)$ та $f \in L_q(\Omega)$ розглянемо таку задачу оптимального керування:

$$L_\Omega = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p dx + \int_\Omega |\nabla y(x)|^p dx \quad (2.1)$$

при обмеженнях

$$\mathcal{U} \in L_\infty^{n \times n}(D), \mathcal{U} \in U_{sol}, y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega), \quad (2.2)$$

$$-\operatorname{div}(\mathcal{U}(x) |\nabla y|^{p-2} \nabla y) + a_0(x) |y|^{p-2} y = f \text{ в } \Omega, \quad (2.3)$$

де $a_0(x) \geq 0$. Через U_{sol} позначено клас узагальнено соленоїдальних матриць:

$$U_{sol} = \left\{ \left\{ a_{ij} \right\}_{1 \leq i, j \leq n} \left| \begin{array}{l} a_{ij} \in L_\infty(D) \\ 0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq a_{ij}(x) \leq \xi_2(x) \text{ м.с. в } D, \\ \exists \alpha > 0, \forall \eta \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) |\eta|^{p-2} \eta_j \eta_i \geq \alpha |\eta|^p \text{ м. с. в } D \end{array} \right. \right\} \cap V. \quad (2.4)$$

Тут ξ_1, ξ_2 — задані функції з простору $L_\infty(D)$ такі, що

$$0 < \delta \leq \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь в } D, \quad (2.5)$$

а множина V визначається як

$$V = \{ \mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \mid \operatorname{div} \mathbf{u}_i \in Q_i, \forall i = 1, \dots, n \},$$

де $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ — компактні множини в просторі $W_q^{-1}(D)$. Множиною допустимих розв'язків Ξ задачі (2.1)–(2.3) будемо називати сукупність пар $(\mathcal{U}, y) \in L_\infty^{n \times n}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, які пов'язані співвідношеннями (2.2)–(2.3). Через τ будемо позначати топологію в просторі $L_\infty^{n \times n}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ як добуток $*$ —слабкої топології в $L_\infty^{n \times n}(\Omega)$ та слабкої топології в просторі $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$.

Виходячи з (2.4)–(2.5), легко бачити, що нелінійний еліптичний оператор у рівнянні (2.3) є коерцитивним, строго монотонним та демінеперервним. Цього достатньо, щоб стверджувати однозначну розв'язність крайової задачі

(2.2)–(2.4) (див. [2]). Тоді, за аналогією з [3], легко показати, що задача (2.1)–(2.3) є розв’язною у класі узагальнено-соленоїдальних керувань (див. також [1]).

Метою даної роботи є дослідити асимптотичну поведінку розв’язків задач оптимального керування

$$L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |y_\varepsilon(x) - z_\partial(x)|^p dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y_\varepsilon(x)|^p dx \longrightarrow \inf, \quad (2.6)$$

$$-\operatorname{div} (\mathcal{U}_\varepsilon(x) |\nabla y_\varepsilon|^{p-2} \nabla y_\varepsilon) + a_0 |y_\varepsilon|^{p-2} y_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \quad (2.7)$$

$$y_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon), \quad \mathcal{U}_\varepsilon \in U_{sol} \quad (2.8)$$

відносно збурень $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області $\Omega \subseteq D$. Далі ε означатиме малий параметр, що змінюється в межах строго спадної послідовності додатних чисел, які прямують до нуля. Будемо припускати, що множина допустимих керувань U_{sol} і, відповідно, множина допустимих розв’язків $\Xi_\varepsilon \subset L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon)$ непорожні для кожного $\varepsilon > 0$.

Надалі проблему оптимального керування (2.1)–(2.3) будемо розглядати як параметризовану відносно області Ω і позначати її як $OCP(\Omega)$. Більше того, припускатимемо, що область Ω , як підмножина евклідового простору, є обмеженою, відкритою, та має достатньо регулярну (принаймні, ліпшицеву) границю. Проте сукупність таких підмножин евклідового простору, в загальному випадку, не утворює лінійний простір. Отже, область Ω , як параметр, належатиме деякому абстрактному простору, взагалі кажучи, без лінійної структури, в якому, до того ж, не має "хорошої" топології. Мається на увазі таке: якщо означити топологію на послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k \geq 1}$ як таку, що узгоджена зі слабкою збіжністю відповідних характеристичних функцій $\chi_{\Omega_k}(\cdot)$, то легко бачити, що така топологія не буде хаусдорфовою. Окрім того, навіть якщо слабка границя характеристичних функцій існує, вона не обов’язково сама є характеристичною функцією, тобто з нею не завжди вдається пов’язати множину, яку можна було б трактувати в деякому сенсі як границю послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k \geq 1}$. У зв’язку з цим будемо дотримуватись таких припущень. Нехай на підмножинах множини D є заданим певний тип збіжності σ .

Означення 1. Нехай $\Omega, \Omega_k \subset D$ — відкриті множини з достатньо регулярними межами. Будемо казати, що послідовність $\{\Omega_k\}_{k \geq 1}$ утворює σ -збурення множини Ω , якщо $\Omega_k \xrightarrow{\sigma} \Omega$ при $k \rightarrow \infty$.

Зауваження 1. Суттєво, що термін " σ -збурення" буде означати не тільки наявність послідовності множин $\{\Omega_k\}_{k \geq 1}$, а й топологію σ , в якій ці множини збігаються до Ω .

Аналіз існуючих публікацій показує (див., зокрема, роботи Марченко & Хрушова [4], Buttazzo & Vocor [6], Dal Maso & Murat [11]), що типовою ситуацією для крайових задач виду (2.2)–(2.3) з умовами Діріхле на границі є наявність властивості "нестійкості" відносно збурень області (з’являються нові вагові коефіцієнти та додаткові члени в рівнянні стану). У зв’язку з цим

зауважимо, що метою даної роботи є отримання достатніх умов на збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, за яких задача оптимального керування (а не лише відповідна крайова задача) буде задовольняти певним умовам стійкості.

3. Основні поняття та попередні результати

У цьому параграфі наведемо ключові поняття та означення, необхідні нам у подальшому. Зокрема, наведемо визначення поняття локальної соболевської ємності, поняття Моско збіжності просторів Соболева та поняття збурень області в хаусдорфовій топології доповнень.

3.1. Поняття соболевської ємності множини. Збіжність соболевських просторів у сенсі Моско

Надалі нам знадобиться поняття локальної соболевської p -ємності:

Означення 2. Для компактної множини K , що міститься у довільній кулі B ємність K в B визначається таким чином:

$$C_p(E, B) = \inf \left\{ \int_B |\nabla \phi|^p dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B), \quad \phi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Також нам буде потрібне поняття Моско-збіжності соболевських просторів.

Означення 3. [15] Будемо казати, що послідовність $\left\{ \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ просторів

Соболева збігається в сенсі Моско до простору $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ якщо виконуються такі умови:

(M₁) для довільного $y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, знайдеться така послідовність

$$\left\{ y_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}, \quad \text{що } \tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \tilde{y} \text{ сильно в } W_p^1(\mathbb{R}^n);$$

(M₂) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — збіжна до нуля послідовність індексів, $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність така, що $y_k \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ та $\tilde{y}_k \rightarrow \psi$ слабо в $W_p^1(\mathbb{R}^n)$, тоді існує функція $y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ така, що $y = \psi|_\Omega$.

Тут і далі, через $\tilde{y}_\varepsilon$ (відповідно $\tilde{y}$) буде позначатися тривіально поширення на $\mathbb{R}^n$ функцій, визначених на Ω_ε (відповідно на Ω), а саме, $\tilde{y}_\varepsilon = \tilde{y}_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon}$ і $\tilde{y} = \tilde{y} \chi_\Omega$. Якщо послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ω в деякому "рівномірному" сенсі, то легко показати, що умови (M₁) та (M₂) будуть виконуватись. Природним питанням є пошук мінімальних умов на множини $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та Ω , за яких збіжність просторів Соболева у сенсі Моско буде мати місце.

З використанням поняття ємності та теорії G -збіжності, у роботах [9, 10, 11] надані необхідні і достатні умови Моско-збіжності.

3.2. Збурення області в хаусдорфовій топології доповнень

Перед тим як говорити про збурення області, необхідно ввести топологію на просторі відкритих підмножин множини D . Для цього дамо визначення хаусдорфової топології доповнень (позначимо її через H^c), яка задається за допомогою такої метрики:

$$d_{H^c}(\Omega_1, \Omega_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |d(x, \Omega_1^c) - d(x, \Omega_2^c)|,$$

де через Ω_i^c позначено доповнення множин Ω_i в $\mathbb{R}^n$.

Означення 4. [8] Будемо говорити, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ відкритих підмножин D збігається до відкритої множини $\Omega \subseteq D$ в H^c -топології, якщо $d_{H^c}(\Omega_\varepsilon, \Omega)$ збігається до нуля 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

H^c -топологія має декілька хороших властивостей, а саме, простір відкритих підмножин множини D є компактним відносно H^c -збіжності, також, якщо $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$, тоді для довільної компактної множини $K \subset \subset \Omega$ та достатньо малих значень параметра ε матимемо $K \subset \subset \Omega_\varepsilon$. Більше того, послідовність відкритих множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset D$ H^c -збігається до відкритої множини Ω , тоді і тільки тоді, коли послідовність доповнень $\{\Omega_\varepsilon^c\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ω^c в сенсі Куратовського [14].

Відомо (див. [6]), що у випадку коли $p > n$, H^c -збіжність відкритих множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset D$ еквівалентна збіжності в сенсі Моско відповідних просторів Соболева.

У загальному випадку ($p \leq n$), має місце:

Теорема 1. [7] Нехай $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність відкритих підмножин D така, що $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ і $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{W}_w(D)$ для всіх $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{W}_w(D)$ визначається таким чином:

$$\mathcal{W}_w(D) = \left\{ \Omega \subseteq D : \forall x \in \partial\Omega, \forall 0 < r < R < 1; \int_r^R \left(\frac{C_p(\Omega^c \cap \overline{B(x,t)}; B(x,2t))}{C_p(B(x,t); B(x,2t))} \right)^{1/(p-1)} \frac{dt}{t} \geq w(r, R, x) \right\}, \quad (3.1)$$

тут через $B(x, t)$ позначено кулю з центром в x та радіусом t , а

$$w : (0, 1) \times (0, 1) \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$$

є такою, що

1. $\lim_{r \rightarrow 0} w(r, R, x) = +\infty$, локально рівномірно на D ;

2. w напівнеперервна знизу за третім аргументом.

Тоді $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$, а послідовність просторів Соболева $\left\{ \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ збігається в сенсі Моско до $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$.

Теорема 2. [7] Нехай $n \geq p > n - 1$, і нехай $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність відкритих підмножин D така, що $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ і $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{O}_l(D)$ для довільного $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{O}_l(D)$ визначається як

$$\mathcal{O}_l(D) = \{\Omega \subseteq D : \#\Omega^c \leq l\} \quad (3.2)$$

(тут через $\#$ позначено кількість зв'язних компонент). Тоді $\Omega \in \mathcal{O}_l(D)$ та послідовність просторів Соболева $\left\{ \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ збігається в сенсі Моско до простору $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$.

Як приклад H^c -збіжних підмножин розглянемо множини $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, що містять осцилюючий "крек" (тріщину) з затухаючою амплітудою ε (див. рис. 1).

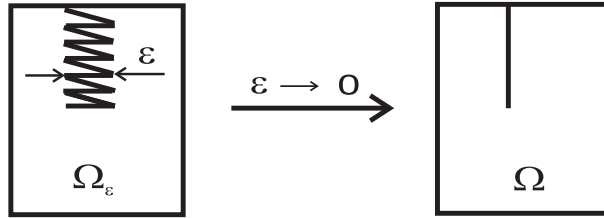


Рис. 1. Послідовність множин, компактна в H^c -топології

Перед тим як ввести строге означення поняття стійкості розглянутої задачі оптимального керування відносно збурень області та визначити допустимі збурення відкритої множини Ω , зауважимо, що збіжність множин $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ в хаусдорфовій топології доповнень не є достатньою умовою для доведення стійкості задачі

$$L_\Omega(\mathcal{U}, y) = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p dx + \int_\Omega |\nabla y(x)|^p dx \longrightarrow \inf, \quad (3.3)$$

$$-\operatorname{div} (\mathcal{U}(x)|\nabla y|^{p-2}\nabla y) + a_0|y|^{p-2}y = f \quad \text{в } \Omega, \quad (3.4)$$

$$y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega), \quad \mathcal{U} \in U_{sol}. \quad (3.5)$$

У загальному випадку, гранична пара послідовності $\left\{ (\mathcal{U}_\varepsilon^{opt}, y_\varepsilon^{opt}) \right\}_{\varepsilon>0}$, при H^c -збуренні множини Ω , може не бути допустимою для вихідної задачі (3.3)–(3.5). Контрприклад наведений в роботі [11] (див. також [6, 10]). Отже, необхідно ввести деякі додаткові обмеження на рухомих область.

4. Допустимі збурення області. Асимптотична поведінка множин допустимих пар збурених задач

У цьому розділі будуть означені допустимі збурення вихідної області і відносно таких збурень буде досліджена асимптотична поведінка множин допустимих пар збурених задач.

Означення 5. Нехай Ω та $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — відкриті підмножини D . Будемо казати, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ утворює H^c -допустиме збурення множини Ω , якщо:

- (i) $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (ii) $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{W}_w(D)$ для всіх $\varepsilon > 0$, де клас $\mathcal{W}_w(D)$ визначено в (3.1).

Зауваження 2. Як стверджує теорема 1, підмножина $\Omega \subset D$ допускає існування H^c -допустимих збурень тоді і тільки тоді, коли Ω належить до класу $\mathcal{W}_w(D)$. Однак ця умова є не дуже обмежливою. Справді, виявляється, що твердження:

$$\text{” якщо } y \in W_p^1(\mathbb{R}^n), \Omega \in \mathcal{W}_w(D), \text{ і } \text{supp } y \subset \bar{\Omega}, \text{ то } y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \text{ ”}$$

є, в загальному випадку, неправильним. Зокрема, вищенаведене не має місця, коли відкрита множина Ω має "крек". Отже, $\mathcal{W}_w(D)$ є достатньо широким класом відкритих підмножин множини D .

Теорема 3. Припустимо, що $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$ — деяка фіксована підобласть D , а $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — деяке H^c -допустиме збурення Ω . Нехай також $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність допустимих пар задач (2.6)–(2.8).

Тоді послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, \tilde{y}_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$ є рівномірно обмеженою в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ і для довільної її часткової τ -границі (τ -кластерної пари)

$(\mathcal{U}^*, y^*) \in L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$, матимемо

$$\mathcal{U}^* \in U_{sol}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \int_D (\mathcal{U}^* |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*, \nabla \tilde{\varphi})_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |y^*|^{p-2} y^* \tilde{\varphi} dx = \\ = \int_D f \tilde{\varphi} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Доведення. Для простоти будемо писати $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}$. Як завжди, тривіальне подовження функції y_ε на $\mathbb{R}^n$ позначатимемо через $\tilde{y}_\varepsilon$. Оскільки кожна з пар $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon)$ є допустимою до відповідної задачі (2.6)–(2.8), то послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, \tilde{y}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ є рівномірно обмеженою відносно норми в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ (див. (2.4) та [3]). Справді, виходячи з коерцитивності розглянутого оператора, легко бачити, що послідовність $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є обмеженою в $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Причому

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y_\varepsilon|^p dx \leq C \|f\|_{W_q^{-1}(D)}^q. \quad (4.3)$$

Отже, можемо припускати, що існує пара $(\mathcal{U}^*, y^*)$ така, що (з точністю до підпослідовності, яку також будемо позначати індексом ε) $(\mathcal{U}_\varepsilon, \tilde{y}_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^*, y^*)$ в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$. Тоді, користуючись тим, що множина U_{sol} є секвенційно компактною підмножиною в $L_\infty^{n \times n}(D)$ (див. [3]), маємо: $\mathcal{U}^* \in U_{sol}$.

Візьмемо як пробну функцію $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$, то, за теоремою 1, послідовність просторів Соболева $\left\{ \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ збігається в сенсі Моско до $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Це означає, що для зафіксованої вище функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ існує послідовність $\left\{ \varphi_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon>0}$ така, що $\tilde{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\varphi}$ сильно в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$ (див. властивість (M_1)). Оскільки $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon)$ є допустимою парою для відповідної задачі на Ω_ε , можемо записати:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\mathcal{U}_\varepsilon |\nabla y_\varepsilon|^{p-2} \nabla y_\varepsilon, \nabla \varphi_\varepsilon \right)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a_0 |y_\varepsilon|^{p-2} y_\varepsilon \varphi_\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \varphi_\varepsilon dx,$$

а, отже,

$$\begin{aligned} \int_D \left(\mathcal{U}_\varepsilon |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon, \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon \right)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{y}_\varepsilon \tilde{\varphi}_\varepsilon dx = \\ = \int_D f \tilde{\varphi}_\varepsilon dx, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для того, щоб довести рівність (4.2), перейдемо до границі в інтегральній тотожності (4.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Використовуючи аргументацію теореми 3 з [3], маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_{i\varepsilon} &\rightarrow \operatorname{div} \mathbf{u}_i^* \text{ сильно в } W_q^{-1}(D), \quad \forall i = 1, \dots, n; \\ \{ |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon \}_{\varepsilon>0} &\text{ обмежена в } L_q^n(D), \quad q = p/(p-1); \\ \{ |\tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{y}_\varepsilon \}_{\varepsilon>0} &\text{ обмежена в } L_q(D); \\ \tilde{y}_\varepsilon &\rightarrow y^* \text{ сильно в } L_p(D), \quad \tilde{y}_\varepsilon(x) \rightarrow y^*(x) \text{ м.с. } x \in D; \\ |\tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{y}_\varepsilon &\rightarrow |y^*|^{p-2} y^* \text{ слабо в } L_q(D), \end{aligned}$$

де $\mathcal{U}_\varepsilon = [\mathbf{u}_{1\varepsilon}, \dots, \mathbf{u}_{n\varepsilon}]$, $\mathcal{U}^* = [\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*]$.

Розглянемо послідовність $\{f_\varepsilon := f - a_0 |\tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Легко бачити, що

$$f_\varepsilon \rightarrow f_0 = f - a_0 |y^*|^{p-2} y^* \quad \text{сильно в } W_q^{-1}(D).$$

Звідси та з оцінки (4.3), випливає, що послідовність $\{A(\mathcal{U}_\varepsilon(x), \nabla \tilde{y}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ обмежена в $L_q^n(D)$. Отже, з точністю до підпослідовності можемо припустити, що існує вектор-функція $\xi \in L_q^n(D)$ така, що

$$\xi_\varepsilon := A(\mathcal{U}_\varepsilon(x), \nabla \tilde{y}_\varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \xi \quad \text{слабо в } L_q^n(D).$$

Враховуючи це та сильну збіжність $\tilde{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\varphi}$ в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$, в результаті граничного переходу при $\varepsilon \rightarrow 0$ у співвідношенні (4.4) отримаємо:

$$\int_D (\xi, \nabla \tilde{\varphi})_{\mathbb{R}^n} dx = \int_D (f - a_0 |y^*|^{p-2} y^*) \tilde{\varphi} dx. \quad (4.5)$$

Залишається показати, що

$$\xi = \mathcal{U}^* |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*. \quad (4.6)$$

А це можна зробити так само, як і в доведенні аналогічної рівності в теоремі 3 з [3]. Зокрема, необхідно повторити всі аргументи того доведення, замінивши Ω на D , $\mathcal{U}_k$ на $\mathcal{U}_\varepsilon$, y_k на $\tilde{y}_\varepsilon$, $\mathcal{U}_0$ на $\mathcal{U}^*$, y_0 на y^* , і ϕ на $\tilde{\varphi}$.

В результаті, оскільки представлення (4.6) справедливе, інтегральна тождність (4.5) набуває вигляду бажаної рівності (4.2). Твердження доведене. $\square$

Далі, доведемо, що кожна τ -кластерна пара $(\mathcal{U}^*, y^*) \in L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ послідовності $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ (див. твердження 3) є допустимою для вихідної задачі оптимального керування (3.3)–(3.5). Як випливає з (4.1)–(4.2), залишається показати, що $y^*|_\Omega \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$, а отже $(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \in \Xi$. Для цього скористаємося наступним результатом, який є прямим наслідком Теорема 1.1 з [7].

Лема 1. [7] *Нехай $\Omega, \{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \in \mathcal{W}_w(D)$, і $\Omega_\varepsilon \xrightarrow{H^c} \Omega$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нехай також $\mathcal{U}_0$ — довільна фіксована матриця з множини U_∂ . Тоді*

$$\tilde{v}_{\Omega_\varepsilon, h} \rightarrow \tilde{v}_{\Omega, h} \text{ сильно в } \overset{\circ}{W}_p^1(D) \quad \forall h \in \overset{\circ}{W}_p^1(D), \quad (4.7)$$

де через $v_{\Omega_\varepsilon, h}$ і $v_{\Omega, h}$ позначено єдині слабкі розв'язки крайових задач

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathcal{U}_0 |\nabla v|^{p-2} \nabla v) + a_0 |v|^{p-2} v &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ v - h &\in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

і

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathcal{U}_0 |\nabla v|^{p-2} \nabla v) + a_0 |v|^{p-2} v &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ v - h &\in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega), \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

відповідно, а через $\tilde{v}_{\Omega_\varepsilon, h}$ та $\tilde{v}_{\Omega, h}$ — поширення на область D функцій $v_{\Omega_\varepsilon, h}$ та $v_{\Omega, h}$, що співпадають з h поза множинами Ω_ε та Ω відповідно.

Тепер доведемо бажану властивість.

Теорема 4. *Нехай $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ — це послідовність допустимих пар задач (2.6)–(2.8), де $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ — це деяке H^c -допустиме збурення множини $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$. Якщо для підпослідовності з $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ (яку ми будемо позначати тим самим індексом ε) має місце $(\mathcal{U}_\varepsilon, \tilde{y}_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^*, y^*)$, то це означає, що*

$$y^* = \tilde{y}_{\Omega, \mathcal{U}^*}, \quad \text{а отже} \quad (\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \in \Xi,$$

де через $y_{\Omega, \mathcal{U}^*}$ позначено слабкий розв'язок крайової задачі (3.4)–(3.5) при $\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$.

Доведення. Для зручності будемо використовувати такі позначення: $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}_\varepsilon}$, $y = y_{\Omega, \mathcal{U}^*}$.

З рівномірної обмеженості послідовності $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ та 3 маємо (переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно):

$$\mathcal{U}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}^* = [\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*] \in U_{sol} \quad * \text{—слабко в } L_\infty^{n \times n}(D), \quad (4.10)$$

$$\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow y^* \quad \text{слабко в } \overset{\circ}{W}_p^1(D), \quad (4.11)$$

$$y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega), \quad \tilde{y} \in \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Доведемо, що $y^* = \tilde{y}$. Подібно до D. Bucur, P. Trebeschi [7], для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо нову крайову задачу:

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} (\mathcal{U}^* |\nabla \varphi_\varepsilon|^{p-2} \nabla \varphi_\varepsilon) + a_0 |\varphi_\varepsilon|^{p-2} \varphi_\varepsilon &= 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{\varphi}_\varepsilon &= -y^* \quad \text{в } D \setminus \Omega_\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

У слабкому сенсі це означатиме, що

$$\int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon, \nabla \tilde{\psi}_\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{\varphi}_\varepsilon \tilde{\psi}_\varepsilon dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.13)$$

Покладаючи у (4.13) як пробну функцію $\tilde{\psi}_\varepsilon = \tilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \tilde{y}_\varepsilon$, маємо:

$$\begin{aligned} \int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon, \nabla (\tilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \tilde{y}_\varepsilon))_{\mathbb{R}^n} dx + \\ + \int_D a_0 |\tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{\varphi}_\varepsilon (\tilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \tilde{y}_\varepsilon) dx = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Нехай $\varphi \in W_p^1(\Omega)$ — це слабкий розв'язок задачі

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} (\mathcal{U}^* |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi) + a_0 |\varphi|^{p-2} \varphi &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \tilde{\varphi} &= -y^* \quad \text{в } D \setminus \Omega. \end{aligned} \right\}$$

Тоді за лемою 1, маємо $\tilde{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\varphi}$ сильно в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$. Отже,

$$\nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \nabla \tilde{\varphi} \quad \text{сильно в } L_p^n(D),$$

$$\| |\nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_q^n(D)}^q = \| \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p^n(D)}^p \rightarrow \| \nabla \tilde{\varphi} \|_{L_p^n(D)}^p = \| |\nabla \tilde{\varphi}|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi} \|_{L_q^n(D)}^q,$$

$$\nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \rightarrow \nabla \tilde{\varphi}(x) \quad \text{м. с. в } D,$$

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\varphi} \quad \text{сильно в } L_p(D),$$

$$\| |\tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_q(D)}^q = \| \tilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(D)}^p \rightarrow \| \tilde{\varphi} \|_{L_p(D)}^p = \| |\tilde{\varphi}|^{p-2} \tilde{\varphi} \|_{L_q(D)}^q,$$

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) \quad \text{м. с. в } D.$$

Оскільки збіжність норм разом із поточною збіжністю дають сильну збіжність, отримаємо:

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi}_\varepsilon &\rightarrow |\nabla \tilde{\varphi}|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi} \text{ сильно в } L_q^n(D), \\ |\tilde{\varphi}_\varepsilon|^{p-2} \tilde{\varphi}_\varepsilon &\rightarrow |\tilde{\varphi}|^{p-2} \tilde{\varphi} \text{ сильно в } L_q(D), \\ \nabla (\tilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \tilde{y}_\varepsilon) &\rightarrow \nabla \tilde{\varphi} \text{ слабо в } L_p^n(D) \text{ (див. (4.11))}, \\ (\tilde{\varphi}_\varepsilon + y^* - \tilde{y}_\varepsilon) &\rightarrow \tilde{\varphi} \text{ сильно в } L_p(D), \end{aligned}$$

Отже, інтегральна тотожність (4.14) містить тільки добутки слабо та сильно збіжних послідовностей, і, переходячи до границі в (4.14) при ε прямуючому до нуля, отримаємо:

$$\int_D \left(\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{\varphi}|^{p-2} \nabla \tilde{\varphi}, \nabla \tilde{\varphi} \right)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{\varphi}|^p dx = 0.$$

З урахуванням властивості матриці $\mathcal{U}^*$ і a_0 , з попередньої рівності випливає, що $\tilde{\varphi} = 0$ м.с. в D . А, за означенням $\tilde{\varphi} = -y^*$ в $D \setminus \overset{\circ}{\Omega}$. Отже $y^* = 0$ в $D \setminus \overset{\circ}{\Omega}$, і бажана властивість отримана: $y_{\mathcal{U}^*, \Omega} = y^*|_{\Omega} \in W_p^1(\Omega)$. Твердження доведене. $\square$

Наслідок 1. Нехай $\{\mathcal{U}_\varepsilon \equiv \mathcal{U}^*\}_{\varepsilon > 0}$ — стала послідовність, де $\mathcal{U}^* \in U_{sol}$ — довільне допустиме керування. Нехай $\left\{ y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}^*} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \right\}_{\varepsilon > 0}$ — відповідні розв'язки (2.7)–(2.8). Тоді, в умовах твердження 4, маємо:

$$\tilde{y}_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}^*} \rightarrow \tilde{y}_{\Omega, \mathcal{U}^*} \text{ сильно в } \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Доведення. Як випливає з твердження 4, для послідовності допустимих пар $\{(\mathcal{U}^*, y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}^*}) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ існує τ -гранична пара $(\mathcal{U}^*, y^*)$ така, що $y^*|_{\Omega} = y_{\mathcal{U}^*, \Omega}$. Слабка збіжність даної послідовності випливає з твердження 4. Згідно з умовами на коефіцієнти матриці $\mathcal{U}^*$, як еквівалентну норму простору $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$ можна взяти таку:

$$|||y|||_{\overset{\circ}{W}_p^1(D)} = \left(\int_D (\mathcal{U}^* |\nabla y|^{p-2} \nabla y, \nabla y)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0(x) |y|^p dx \right)^{1/p}$$

Достатньо встановити, що

$$|||\tilde{y}_\varepsilon|||_{\overset{\circ}{W}_p^1(D)} \rightarrow |||y^*|||_{\overset{\circ}{W}_p^1(D)} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

У рівняннях (3.4) та (2.7), за пробні функції візьмемо y^* і $\tilde{y}_\varepsilon$, відповідно.

Переходячи до границі в (2.7), отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D (\mathcal{U}_\varepsilon |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon, \nabla \tilde{y}_\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon|^p dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon, \nabla \tilde{y}_\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon|^p dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|\tilde{y}_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{W}_p^1(D)} \right)^p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D f \tilde{y}_\varepsilon dx = \int_D f y^* dx \\
&= \int_D (\mathcal{U}^* |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*, \nabla y^*)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |y^*|^p dx = \\
&= \left(\|y^*\|_{\overset{\circ}{W}_p^1(D)} \right)^p.
\end{aligned}$$

Отже, (4.15), разом зі слабкою збіжністю в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$ дає сильну збіжність розв'язків. Оскільки $y_\Omega, \mathcal{U}^*$ — єдиний розв'язок задачі (2.1)–(2.3), а $(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega)$ належить множині Ξ_Ω , це означає, що $y^*|_\Omega = y_\Omega, \mathcal{U}^*$. Таким чином,

$$(\mathcal{U}^*, \tilde{y}_\varepsilon) \longrightarrow (\mathcal{U}^*, y^*) \text{ сильно в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Твердження доведене. $\square$

Тепер можемо сформулювати наступний результат.

Теорема 5. Нехай Ω , $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — відкриті підмножини D . Нехай також

$$\Xi_{\Omega_\varepsilon} \subset L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_\varepsilon) \quad \text{і} \quad \Xi_\Omega \subset L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$$

є множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (2.6)–(2.8) та (3.3)–(3.5), відповідно. Припустимо, що $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є H^c -допустимим збуренням області Ω .

Тоді послідовність $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ξ_Ω в сенсі Моско, а саме, виконуються наступні властивості:

(ΞM_1) для довільної пари $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, знайдеться така послідовність

$$\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$$

така, що $\mathcal{U}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n \times n}(D)$ і $\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$;

(ΞM_2) якщо числова послідовність $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ збігається до 0, а $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність така, що

$$(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{і}$$

$$(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}, \psi) \quad \text{в} \quad L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D),$$

то існує функція $y \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ така, що $y = \psi|_\Omega$ і $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що властивість (ΞM_2) є прямим наслідком твердження 4. Отже, залишається перевірити лише властивість (ΞM_1) .

За вихідними припущеннями, множина допустимих пар Ξ_Ω для задачі (3.3)–(3.5) непорожня. Нехай $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$ — її довільний елемент. Побудуємо послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, що буде задовольняти властивість (ΞM_1) таким чином: $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U} \ \forall \varepsilon > 0$, а $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}}$ — відповідний розв’язок крайової задачі (2.7)–(2.8). Зауважимо, що такий вибір можливий, оскільки матриця $\mathcal{U}$ є допустимим керуванням для задачі (2.6)–(2.8) при кожному $\varepsilon > 0$. Тоді, згідно з наслідком 1, отримаємо

$$\tilde{y}_{\Omega_\varepsilon, \mathcal{U}} \rightarrow \tilde{y}_{\Omega, \mathcal{U}} \text{ сильно в } \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Оскільки $y_{\Omega, \mathcal{U}}$ — єдиний розв’язок задачі (3.4)–(3.5) а $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, це означає, що $y = y_{\Omega, \mathcal{U}}$ можна зробити бажаний висновок:

$$(\mathcal{U}, \tilde{y}_\varepsilon) \longrightarrow (\mathcal{U}, \tilde{y}) \text{ сильно в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Теорему доведено. $\square$

5. Поняття Моско-стійкості для задачі оптимального керування

Введемо таке поняття:

Означення 6. Будемо говорити, що задача оптимального керування (2.1)–(2.3) є Моско-стійкою в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ відносно збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω , якщо:

(MS₁) множина допустимих пар Ξ_Ω для (2.1)–(2.3) є границею в сенсі Моско послідовності $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ множин допустимих пар збурених задач (2.6)–(2.8);

(MS₂) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — числова послідовність, яка збігається до 0, а послідовність $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ є такою, що

$$(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ і}$$

$$(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}, y) \text{ в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D), \text{ де } (\mathcal{U}, y|_\Omega) \in \Xi_\Omega,$$

$$\text{то } \liminf_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) \geq L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega);$$

(MS₃) для кожної пари $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, знайдеться послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ така, що $\mathcal{U}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n \times n}(D)$, $\tilde{y}_\varepsilon \rightarrow \tilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$, і

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq L_\Omega(\mathcal{U}, y).$$

Теорема 6. Припустимо, що для заданого збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω , задача оптимального керування (3.3)–(3.5) є Моско-стійкою в просторі

$$L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D).$$

Нехай $\{(\mathcal{U}_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність оптимальних розв'язків відповідних збурених задач (2.6)–(2.8). Тоді ця послідовність є відносно τ -компактною в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ та кожна її τ -гранична пара є оптимальним розв'язком вихідної задачі (3.3)–(3.5). Більше того, якщо

$$(\mathcal{U}_\varepsilon^0, \tilde{y}_\varepsilon^0) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^0, y^0), \quad (5.1)$$

то $(\mathcal{U}^0, y^0|_\Omega) \in \Xi_\Omega$ і

$$\inf_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U}, y) = L_\Omega(\mathcal{U}^0, y^0|_\Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon). \quad (5.2)$$

Доведення. Як уже не раз наголошувалось, довільна послідовність допустимих пар збурених задач (2.6)–(2.8) є рівномірно обмеженою у просторі

$$L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D),$$

а, отже, те саме торкається і послідовності оптимальних пар

$$\{(\mathcal{U}_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}.$$

Отже, можна зробити висновок, що дана послідовність є відносно τ -компактною в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$, і припустити, що існує підпослідовність

$$\{(\mathcal{U}_{\varepsilon_k}^0, y_{\varepsilon_k}^0)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

і пара $(\mathcal{U}^*, y^*)$ такі, що $(\mathcal{U}_{\varepsilon_k}^0, \tilde{y}_{\varepsilon_k}^0) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^*, y^*)$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді за теоремою 5 (див. властивість (ΞM_2)), отримаємо $(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \in \Xi_\Omega$. А тоді, згідно з умовою (MS_2) означення 6, маємо:

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}, y) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_{\varepsilon_k}^0, y_{\varepsilon_k}^0) \geq \\ &\geq L_\Omega(\mathcal{U}^*, y^*|_\Omega) \geq \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U}, y) = L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

З іншого боку, умова (MS_3) стверджує існування такої послідовності

$$\{(\hat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}, \text{ що}$$

$$(\hat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^{opt}, \tilde{y}^{opt}), \text{ і } L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\hat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon).$$

Використовуючи цей факт, маємо

$$\begin{aligned} \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega} L_\Omega(\mathcal{U}, y) &= L_\Omega(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\hat{\mathcal{U}}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon) \geq \\ &\geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}, y) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}, y) = \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_{\varepsilon_k}^0, y_{\varepsilon_k}^0). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Звідси і з (5.3), робимо висновок, що

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_{\varepsilon_k}^0, y_{\varepsilon_k}^0) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_{\varepsilon_k}^0, y_{\varepsilon_k}^0).$$

Тепер, об'єднуючи співвідношення (5.3) та (5.4), і переписуючи їх у формі рівностей, отримаємо

$$L_{\Omega}(\mathcal{U}^*, y^*|_{\Omega}) = L_{\Omega}(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) = \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_{\Omega}} L_{\Omega}(\mathcal{U}, y), \quad (5.5)$$

$$L_{\Omega}(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}, y). \quad (5.6)$$

Оскільки рівності (5.5)–(5.6) справедливі для кожної τ -збіжної підпослідовності вихідної послідовності $\{(\mathcal{U}_{\varepsilon}^0, y_{\varepsilon}^0) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon}}\}_{\varepsilon > 0}$ оптимальних розв'язків, робимо висновок, що границі в (5.5)–(5.6) співпадають, а отже, $L_{\Omega}(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt})$ є границею всієї послідовності мінімальних значень

$$\left\{ L_{\Omega_{\varepsilon}}(\mathcal{U}_{\varepsilon}^0, y_{\varepsilon}^0) = \inf_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon}}} L_{\Omega_{\varepsilon}}(\mathcal{U}, y) \right\}_{\varepsilon > 0}.$$

Теорему доведено. $\square$

6. Достатні умови Моско-стійкості

Наступною метою є виведення достатніх умов для Моско-стійкості задачі оптимального керування (3.3)–(3.5). Для цього використаємо наступний результат.

Лема 2. *Нехай Ω — відкрита підмножина D . Припустимо, що послідовність $\{\Omega_{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ утворює деяке допустиме збурення області Ω (в сенсі означення 5). Нехай $\{\chi_{\Omega_{\varepsilon}}\}_{\varepsilon > 0}$ — це послідовність відповідних характеристичних функцій. Нехай χ^* — її $*$ -слабка границя в $L_{\infty}(D; [0, 1])$. Тоді*

$$\chi_{\Omega}(1 - \chi^*) = 0 \quad \text{м. с. в } D. \quad (6.1)$$

Доведення. Легко бачити, що для фіксованого збурення $\{\Omega_{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ множини Ω , з точністю до підпослідовності, існує функція χ^* така, що $\chi_{\Omega_{\varepsilon}}$ збігається $*$ -слабко до χ^* в $L_{\infty}(D; [0, 1])$.

Нехай $\left\{ y_{\varepsilon} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_{\varepsilon}) \right\}_{\varepsilon > 0}$ — довільна послідовність, така що $\tilde{y}_{\varepsilon} \rightharpoonup y^*$ в $\overset{\circ}{W}_p^1$

(D) і $y^*|_{\Omega} \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$. Згідно з твердженням 4 такий вибір є завжди можливим. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \tilde{y}_{\varepsilon} \varphi \, dx = \int_D y^* \varphi \, dx = \int_D \chi_{\Omega} y^* \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L_q(D).$$

З іншого боку, використовуючи той факт, що $\tilde{y}_{\varepsilon} \rightarrow y^*$ сильно в $L_p(D)$, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \tilde{y}_{\varepsilon} \varphi \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon}} \tilde{y}_{\varepsilon} \varphi \, dx = \int_D \chi^* y^* \varphi \, dx = \\ &= \int_D \chi^* \chi_{\Omega} y^* \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in L_q(D) \end{aligned}$$

як границя добутку сильно та $*$ -слабко збіжних послідовностей. Лему доведено. $\square$

Наступна теорема торкатиметься достатніх умов Моско-стійкості класу задач оптимального керування (3.3)–(3.5).

Теорема 7. *Нехай Ω — відкрита підмножина D . Припустимо, що розподілення $z_\partial \in L_p(D)$ у функціоналі якості (3.3) є таким, що*

$$z_\partial(x) = z_\partial(x)\chi_\Omega(x) \quad \text{для м. в. } x \in D. \quad (6.2)$$

І нехай виконується принаймні одна з умов $\Omega \in \mathcal{W}_w(D)$ і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ є H^c -допустимим збуренням області Ω .

Тоді задача оптимального керування (3.3)–(3.5) є Моско-стійкою в просторі $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$.

Доведення. Перевіримо пункти (MS_1) – (MS_3) означення 6.

Умова (MS_1) була доведена в теоремі 5. Нехай $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність, що задовольняє властивості, описані в пункті (MS_2) , і нехай $(\mathcal{U}, y)$ є її τ -границею. Тоді $|\tilde{y}_k - z_\partial|^p \rightarrow |y - z_\partial|^p$ сильно в $L_1(D)$, і

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \tilde{y}_k\|_{\mathbf{L}_p(D)}^p \geq \|\nabla y\|_{\mathbf{L}_p(D)}^p,$$

оскільки норма є напівнеперервною знизу функцією відносно слабкої збіжності. Отже,

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) &= \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\tilde{y}_k - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_k|^p dx \right) \geq \\ &\geq \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla y|^p dx = \\ &= \{ \text{згідно (6.2)} \} = \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|^p dx = \\ &= \{ \text{згідно (6.1)} \} = \int_\Omega |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|^p dx = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega). \end{aligned}$$

Отже, пункт (MS_2) перевірено. Залишається зробити перевірку останньої умови означення 6. Однак це легко випливає із сильної збіжності $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \rightarrow (\mathcal{U}, y)$ в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ та властивостей (6.1)–(6.2). Справді, в цьому випадку маємо:

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{y}_\varepsilon - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^p dx \right) = \\ &= \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla y|^p dx = \\ &= \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|^p dx = \\ &= \int_\Omega |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|^p dx = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega). \end{aligned}$$

Теорему доведено. $\square$

Наприкінці наведемо ще одне твердження, яке торкається варіаційних властивостей задачі оптимального керування (3.3)–(3.5) при Моско-стійких збуреннях.

Теорема 8. *Припустимо, що виконуються всі припущення теореми 6. Нехай $(\mathcal{U}^0, y^0)$ — оптимальна пара задачі оптимального керування (3.3)–(3.5), а $\{(\mathcal{U}_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність оптимальних пар для задач (2.6)–(2.8) така, що*

$$(\mathcal{U}_\varepsilon^0, \tilde{y}_\varepsilon^0) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^0, \tilde{y}^0) \text{ в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D). \quad (6.3)$$

Тоді з умови (6.2) випливає, що

$$\tilde{y}_\varepsilon^0 \rightarrow \tilde{y}^0 \text{ сильно в } \overset{\circ}{W}_p^1(D), \quad (6.4)$$

і

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\mathcal{U}_\varepsilon^0 |\nabla y_\varepsilon^0|^{p-2} \nabla y_\varepsilon^0, \nabla y_\varepsilon^0)_{\mathbb{R}^n} dx = \\ = \int_{\Omega} (\mathcal{U}^0 |\nabla y^0|^{p-2} \nabla y^0, \nabla y^0)_{\mathbb{R}^n} dx. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Доведення. Як випливає з доведення теореми 7, для заданого збурення області Ω задача оптимального керування (3.3)–(3.5) на Ω є Моско-стійкою в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$. Більше того, згідно з теоремою 6, довільна послідовність оптимальних пар збурених задач (2.6)–(2.8) є відносно τ -компактною в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ і кожна її τ -гранична точка є оптимальним розв'язком для вихідної задач (3.3)–(3.5). Отже, припущення (6.3) не є обмежливим.

Для доведення (6.4), скористаємось співвідношенням (5.2). Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{y}_\varepsilon^0 - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_\varepsilon^0|^p dx \right) = \\ = \int_D \chi_\Omega |\tilde{y}^0 - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla \tilde{y}^0|^p dx. \end{aligned} \quad (6.6)$$

За теоремою вкладення Соболева, маємо $\tilde{y}_\varepsilon^0 \rightarrow \tilde{y}^0$ сильно в $L_p(D)$. Звідси, користуючись властивостями (6.1)–(6.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{y}_\varepsilon^0 - z_\partial|^p dx = \int_D \chi^* \chi_\Omega |\tilde{y}^0 - z_\partial|^p dx = \\ = \int_D \chi_\Omega |\tilde{y}^0 - z_\partial|^p dx. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Поєднуючи це з (6.6), приходимо до співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D |\nabla \tilde{y}_\varepsilon^0|^p dx = \int_D |\nabla \tilde{y}^0|^p dx,$$

яке разом зі слабкою збіжністю в $\overset{\circ}{W}_p^1(D)$ дає (6.4).

Залишається довести збіжність енергій (6.5). Для цього скористаємось рівностями (3.4) і (2.7), замінивши там y на y^0 , та y_ε на y_ε^0 , відповідно. Тоді для відповідних інтегральних тотожностей візьмемо за пробні функції $\tilde{y}^0$ та $\tilde{y}_\varepsilon^0$, відповідно. В результаті граничного переходу в (2.7) отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_D (\mathcal{U}_\varepsilon^0 |\nabla \tilde{y}_\varepsilon^0|^{p-2} \nabla \tilde{y}_\varepsilon^0, \nabla \tilde{y}_\varepsilon^0)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon^0|^p dx \right) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D f \tilde{y}_\varepsilon^0 dx = \int_D f \tilde{y}^0 dx = \\ = \int_D (\mathcal{U}^0 |\nabla \tilde{y}^0|^{p-2} \nabla \tilde{y}^0, \nabla \tilde{y}^0)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0 |\tilde{y}^0|^p dx. \end{aligned}$$

Тепер залишається тільки скористатися рівністю

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon^0|^p dx = \int_D a_0 |\tilde{y}^0|^p dx$$

(див. (6.7)). Твердження доведене. $\square$

7. Висновки

У роботі отримано достатні умови на збурення області, за виконання яких послідовність множин допустимих розв'язків збурених задач Моско збігається в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \overset{\circ}{W}_p^1(D)$ до множини допустимих розв'язків вихідної задачі. Авторами сформульоване поняття Моско-стійкості задачі оптимального керування і доведено, що відносно обраного типу збурень області, розглянута у роботі оптимізаційна задача є стійкою.

Бібліографічні посилання

1. Жиков В. В. Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. Л. Олейник. — М. : Физматлит, 1993.
2. Иваненко В. И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. — К. : Наукова думка, 1988. — 324с.
3. Капустян В.Є. Про розв'язність одного класу задач оптимального керування коефіцієнтами в головній частині нелінійного еліптичного оператора // В. Є. Капустян, О. П. Когут // Нелінійні коливання. — 2009. — Т.12. — № 1. — С. 59 – 72.
4. Марченко В. А. Усредненные модели микронеоднородных сред / В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. — К.: Наукова думка, 2005. — 550 с.
5. Ball J.M., Mizel V.J. One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler–Lagrange equation // Arch. Rational Mech. Anal. — 1985. — № 90. — p. 325–388.
6. Bucur D., Buttazzo G., Variational Methodth in Shape Optimization Problems // in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. — Boston: Birkhäuser. — Vol. 65. — 2005.

7. *Bucur D., Trebeschi P.* Shape optimization problem governed by nonlinear state equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — (1998). — Ser. A. — Vol. 128. — p. 943–963.
8. *Bucur D., Zolésio Z.P.* *N*-Dimensional Shape Optimization under Capacitary Constraints // J. Differential Equations. — 1995. — Vol. 123. — № 2. — p. 504–522.
9. *Dal Maso G., Defranceschi A.* Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains // Mnuskr.math. — 1988. — №6. — p. 251–278.
10. *Dal Maso G., Ebobisse F., Ponsiglione M.* A stability result for nonlinear Neumann problems under boundary variations // J. Math. Pures Appl. — 2003. — Vol. 82. — p. 503–532.
11. *Dal Maso D., Murat F.* Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.Sci.. — 1997. — no. 4. — Vol. 24. — p. 239–290.
12. *Dancer E.N.* The effect of domains shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equations // J. Diff. Equations. — 1990. — Vol. 87. — p. 316–339.
13. *Daners D.* Domain perturbation for linear and nonlinear parabolic equations // J. Diff. Equations. — 1996. — Vol. 129. — Issue 2. — p. 358–402.
14. *Falconer K.J.* The Geometry of Fractal Sets. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
15. *Mosco U.* Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities // Adv. Math. — 1969. — vol. 3. — p. 510–585.

Надійшла до редакції 01.09.2009

УДК 519.6

ON THE EXISTENCE OF H^1 -SOLUTIONS TO CERTAIN
IMAGE REGISTRATION PROBLEMS

O. Museyko

*Institute of Medical Physics, University of Erlangen-Nuremberg,
Erlangen 91052, Germany. E-mail: museyko@gmx.de*

The solubility of the class of nonlinear optimization problems arising in image registration is discussed. The necessary optimality conditions (Euler-Lagrange equation) for such kind of problems is a nonlinear Neumann boundary value problem which is not known to have a solution in general. However, in the image registration context some assumptions can be made that let us move a little bit further in this question.

Key words. Image registration, nonlinear optimization problem, nonlinear Neumann boundary value problem, existence of H^1 -solutions.

1. Introduction

Consider the following optimization problem:

$$J(u) = \int_{\Omega} |I^T(x - u(x)) - I^R(x)|^2 dx + a(u, u) \rightarrow \inf, \quad (1.1)$$

where $u(x)$ is an *offset field* associated with the transformation $\varphi(x) = x - u(x)$, u is an element of a certain class of admissible displacements W ; and the application dependent regularizing term $a(\cdot, \cdot)$ is a bilinear bounded form in $W \times W$. The images I^T (template) and I^R (reference) are nonnegative functions in Ω . The domain Ω in R^d where images are defined is assumed to be bounded and Lipschitz. We also assume that I^T can be extended by zero to R^d so that $I^T(x - u(x))$ makes sense for any u .

This is a so-called image registration problem for the monomodal images, i.e. obtained on the same hardware so that the intensity of their pixels can be compared directly, as in the first term in J which is a sum of squared differences (SSD). An example of reference and template images is in Figure 1 which shows two sets of orthogonal multiplanar projections of a human femur taken within the interval of one year. The purpose of *monomodal* registration in this case is to compare changes in different subvolumes of interest caused by a medical treatment.

From this point on, the reference image $I^R(x)$ is supposed to be an element of the space $L^\infty(\Omega)$. The template image $I^T(x)$ is an element of $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$.

The regularizing term $a(\cdot, \cdot)$, a bilinear form, penalizes the undesired properties of u .

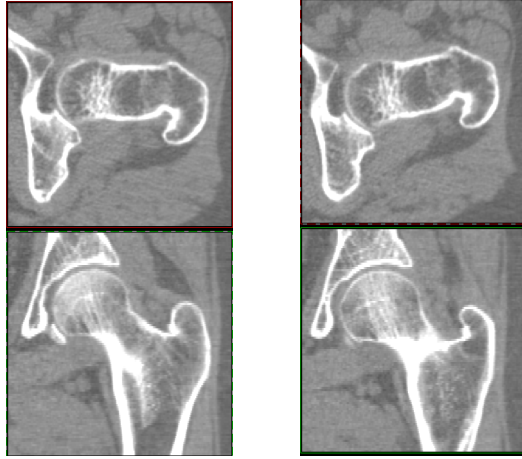


Fig. 1. Example of a template and a reference image in R^3 : Orthogonal multiplanar projections of a CT-scan of human femur. Left and right show slices from two volumes taken within the time interval of one year, extracted at approximately the same anatomical position.

The existence of solutions to the problem (1.1) for several conventional regularizers $a(\cdot, \cdot)$ (diffusion, elastic, etc) can be readily stated in Sobolev space $W = H_0^1(\Omega)^d$ since the functional $J(u)$ is lower semicontinuous and coercive in the weak topology of this space (see [3], where also classical solutions are considered). See also [2], where the well-posedness of the Euler-Lagrange system for (1.1) is considered in abstract Banach space (of course, the solubility of the system doesn't guarantee the existence of minimizers for original problem).

However, when computing numerical solutions to an image registration problem, one usually works in the space $W = H^1(\Omega)^d$, see [1] for instance. The reason is that the Euler-Lagrange system for the problem of type (1.1), used to compute a solution, is usually supplied with *homogenous Neumann* boundary conditions on u . These conditions are natural in image registration. Indeed, looking for the suitable registration transformation $\varphi(x) = x - u(x)$ which makes a template being similar to a reference (in the sense of our image similarity measure (1.1)), we would like to admit a non-zero offset for every pixel in a moving template image: consider the rigid rotation as a typical example in image matching. Such a possibility would be lost with the homogenous Dirichlet boundary conditions, which are applied in a case of the space $H_0^1(\Omega)^d$. To the best knowledge of the author, the existence of H^1 -solutions to the problem (1.1) was not yet established.

Summarizing, we can say that in the image registration area the problem (1.1) is de facto considered in $H^1(\Omega)^d$, which is, despite of the great amount of important practical results, remains formal problem. The purpose of the paper is to fill up this gap between the theoretical and practical parts of the image registration problem.

2. Assumptions and the proof of existence

According to the direct methods in the calculus of variations, the weak lower semicontinuity and coerciveness of the functional are sufficient to state the existence of the minimizers. We are going to show the weak lower semicontinuity of the

functional $J(u)$ in $H^1(\Omega)$ and the weak sequential compactness of the minimizing sequence u_n only, not the coercivity of the functional J . The argument of the direct methods is then equally applicable.

The check of the lower semicontinuity is almost straightforward, which is not the case with the compactness. To obtain the compactness we apply the idea of the proof of the Poincaré inequality for the sequence of functions u_n which are known to be bounded in $H^1(D)$ where D is a subset of Ω .

First of all we establish the following auxiliary result.

Proposition 1. Let a sequence $\{U_n\}$ of subsets in Ω be such that there exist a sequence of points $\{x_n\}$ in Ω which, together with the balls of some radius $\varepsilon > 0$ around them, belong to the corresponding sets U_n : $B_\varepsilon(x_n) \subset U_n$ for all n .

Then there exist a point y and a ball $B_\delta(y)$ in Ω which belong to every set in a subsequence of the sets U_n :

$$B_\delta(y) \subset U_{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

for some $\delta > 0$.

Proof. Let us fix a number $\delta < \varepsilon$ and consider a mesh with grid points $y_i \in \Omega$, $i \in \overline{1, l}$ such that the distance between any two points in a single cell is less than $\varepsilon - \delta$. Assume that the corollary claimed in Proposition is false. For the point y_1 it means that there exists an index m such that $B_\delta(y_1) \not\subset U_k$ for all $k > m$. That is, $|x_k - y_1| > \varepsilon - \delta$. Now take the rest points $y_2, y_3, \dots, y_l \in \Omega$ in turn. Since the domain Ω is bounded, only a finite number of balls $B_\varepsilon(x_k)$ can belong to Ω . This contradiction concludes the proof. $\square$

The following lemma is used to prove the boundedness of the minimizing sequence u_n in the space $H^1(D)$ where D is a certain subset of Ω .

Lemma 1. Let Ω be bounded. Let for a sequence $\{u_n \in L^2(\Omega)^d\}$ there exists $\varepsilon > 0$ and a sequence of balls $B_\varepsilon(x_n)$ of radius ε in Ω such that

$$\sup_n \|u_n\|_{L^2(B_\varepsilon(x_n))^d} < \infty. \quad (2.1)$$

Then there exist a subsequence u_{n_k} and such a set $D \subset \Omega$ that its Lebesgue volume is positive $\mathfrak{L}^d(D) > 0$ and

$$\sup_k \|u_{n_k}\|_{L^2(D)^d} < \infty.$$

Proof. From Proposition 1 we readily get the existence of a ball $B_\delta(y)$ in Ω such that $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x_{n_k})$ for a certain subsequence of the set sequence $B_\varepsilon(x_n)$. That is,

$$\sup_k \|u_{n_k}\|_{L^2(B_\delta(y))^d} < \infty \quad \text{for all } n,$$

which concludes the proof with $D = B_\delta(y)$. $\square$

To get use of Lemma 1 and ensure the boundedness of gradients of the minimizing sequence, we suppose appropriate properties of the registration problem (1.1).

- (A) There exist $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $C > 0$ and a sequence of balls $B_\varepsilon(x_n)$ of radius ε in Ω such that if

$$\|\bar{u}\|_{L^2(B_\varepsilon(x_n))^d} > C \text{ for all } B_\varepsilon(x_n)$$

then

$$\int_{\Omega} |I^T(x - \bar{u}(x)) - I^R(x)|^2 dx \geq \inf_{u \in H^1(\Omega)^d} \int_{\Omega} |I^T(x - u(x)) - I^R(x)|^2 dx + \delta.$$

- (B) The continuous bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ is coercive in H_0^1 -norm.

Remark 1. In fact, it is natural even to assume that $\|\bar{u}\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))^d} > C$ in assumption (A) above, since otherwise we admit the existence of a mapping $\bar{u}$ which is (sub)optimal (the value of the functional on it can be arbitrarily close to the infimum) and such that any neighbourhood in Ω contains another neighbourhood which is sent outside of Ω by $\bar{u}$.

The condition (B) is fulfilled in the above mentioned cases (elastic, diffusion registration, etc).

We are now in a position to establish the main result.

Theorem 1. *Given the problem (1.1) let the conditions (A)–(B) be satisfied.*

Then there is a function $u^0 \in H^1(\Omega)^d$ such that $J(u^0) \leq J(u)$ for all $u \in H^1(\Omega)^d$.

Proof. Let $u_n \in H^1(\Omega)^d$ be a minimizing sequence for the problem (1.1).

Compactness of the minimizing sequence. Since the bilinear form $a(u, u)$ is coercive in H_0^1 -norm (condition (B)), the sequences $\{\nabla u_n^i\}$ are bounded in $L^2(\Omega)^d$, $i \in \overline{1, d}$. Thus, we need to establish the boundedness of $\{u_n\}$ in $L^2(\Omega)^d$ to ensure the compactness of the minimizing sequence in $H^1(\Omega)^d$. Using condition (A), we have from Lemma 1 the boundedness of $\{u_n\}$ in $L^2(D)^d$ for some $D \subset \Omega$ (up to a subsequence). Then the boundedness in $L^2(\Omega)^d$ directly follows from the Poincaré inequality.

Consequently, one can find a subsequence of $\{u_n\}$ (not relabelled), which converges weakly in $H^1(\Omega)^d$ to some u^0 .

Weak lower semicontinuity. Since u_n is weakly convergent in $H^1(\Omega)^d$, it is also strongly convergent in $L^2(\Omega)^d$ and, therefore, is convergent in measure. Then, by the virtue of Fatou's Lemma and continuity of $a(\cdot, \cdot)$ we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |I^T(x - u^0) - I^R(x)|^2 dx + a(u^0, u^0) \\ \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |I^T(x - u_n) - I^R(x)|^2 dx + a(u_n, u_n). \end{aligned}$$

That is, u^0 is a minimizer for $J(u)$. □

3. Closing remarks

The existence of solutions for a certain class of image registration problems is established. To this end, a strong assumption on the behaviour of minimizing sequence is done which however relates to the specifics of the registration problem.

The result can be extended to other registration problems which are based not on SSD-term but on the mutual information (MI) or the cross-correlation (CC), for example. On the other hand, the proposed argument is also applicable for the registration problem with certain other regularizers when formulated in an appropriate space. One example is a *curvature* registration problem in $H^2(\Omega)^d$ with $a(u, u) = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx$.

The condition (A), although being quite natural, is hard to verify. Therefore, the future efforts will be to find an alternative assumption which is based on the properties of images only and doesn't use variational properties of the registration problem.

References

1. *Jan Modertsitzki* Numerical Methods for Image Registration. — Oxford : Oxford University Press, 2004. — 199 p.
2. *U. Clarenz, M. Droske, M. Rumpf* Towards fast non-rigid registration. — Duisburg, 2002. — (Preprint / University of Duisburg).
3. *Gerardo Hermosillo Valadez* Variational methods for multimodal image matching: PhD thesis May 2002 — Nice, 2002.

Надійшла до редакції 28.09.2009

УДК 517.977

**ЗАДАЧИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С
НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

В. Е. Капустян, И. С. Лазаренко

*Национальный технический университет Украины "КПИ".
03056, Киев, просп. Победы 37. E-mail: kapustyanv@ukr.net*

Дано полное решение задачи с минимальной энергией для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и специальным критерием качества. Решения представлены в виде рядов по биортогональному базису Рисса, которые сходятся к непрерывным функциям.

Ключевые слова. нелокальные краевые условия, параболическое уравнение, задачи с минимальной энергией.

1. Параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями

В работе [6] рассмотрено однопараметрическое семейство начально-краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Pi, \quad (1.1)$$

$$y(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1, t)}{\partial x} + \alpha y(1, t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

где $\Pi = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > t_0 \geq 0\}$, $\alpha \in R$.

При $\alpha = 0$ задача (1.1)–(1.3) известна как задача Самарского–Ионкина. Последний в [4], используя метод разделения переменных, доказал теорему единственности решения, представил его в виде функционального ряда и тем самым получил достаточные условия существования классического решения. Основная трудность применения метода разделения переменных заключалась в том, что система собственных функций оператора второй производной, подчиненного краевым условиям, не образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$ и даже не является полной. Для получения указанных выше результатов система собственных функций дополнялась присоединенными функциями.

Приведем здесь основные результаты работы [6]. Для оператора второй производной ($Lu = -u''$) с краевыми условиями (1.3) задача на собственные числа имеет две серии решений:

$$\lambda_k^{(1)} = (2\pi k)^2, \quad u_k^{(1)}(x) = \sin(2\pi k x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

$$\lambda_k^{(2)} = (2\gamma_k)^2, \quad u_k^{(2)}(x) = \sin(2\gamma_k x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

где γ_k — решения уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = 0.5 \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \gamma = 0.5 \sqrt{\lambda}. \quad (1.6)$$

При $\alpha > 0$ уравнение (1.6) дополнительно имеет корень γ_0 . Ему отвечают собственное значение $\lambda_0 = (2\gamma_0)^2$ и собственная функция $u_0(x) = \sin(2\gamma_0 x)$.

При $\alpha > 0$ отрицательных собственных значений не существует, а при $\alpha < 0$ существует единственное собственное значение $\lambda_0 = -(2\gamma_0)^2 < 0$, где γ_0 — корень уравнения $\operatorname{tg}(\gamma) = -0.5 \alpha/\gamma$. Этому собственному значению отвечает единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция $u_0(x) = \operatorname{sh}(2\gamma_0 x)$.

При достаточно больших k для разности $\delta_k = \gamma_k - \pi k$ имеют место соотношения

$$\frac{|\alpha|}{2\pi k} (1 - (2\pi k)^{-1}) < |\gamma_k - \pi k| < \frac{|\alpha|}{2\pi k} (1 + (2\pi k)^{-1}). \quad (1.7)$$

Множество собственных значений можно упорядочить по возрастанию их значений:

$$0 < \gamma_0 < \gamma_1^{(1)}, \quad \gamma_k^{(1)} < \gamma_k^{(2)} < \gamma_{k+1}^{(1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha > 0;$$

$$\gamma_0 < 0 < \gamma_1^{(2)}, \quad \gamma_k^{(2)} < \gamma_k^{(1)} < \gamma_{k+1}^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha < 0.$$

Оператор L^* , сопряженный к оператору L , имеет те же собственные значения, что и оператор L , которым соответствуют простые собственные функции

$$v_k^{(1)}(x) = \cos(2\pi k x + \tilde{\psi}_k), \quad v_k^{(2)}(x) = \cos(\gamma_k(1 - 2x)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v_0(x) = \cos(\gamma_0(1 - 2x)), \quad \alpha > 0; \quad v_0(x) = \operatorname{ch}(\gamma_0(1 - 2x)), \quad \alpha < 0,$$

где $\tilde{\psi}_k = \arctg(\alpha/(2\pi k))$.

Собственные функции $u(x)$, $v(x)$ операторов L и L^* , отвечающие различным собственным значениям λ , μ , взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения в $L_2(0, 1)$. Скалярные произведения собственных функций, отвечающих одинаковым собственным значениям, имеют вид:

$$(u_k^{(2)}, v_k^{(2)}) = 0.5 \sin \gamma_k (1 + (\sin 2\gamma_k)/(2\gamma_k)),$$

$$(u_k^{(1)}, v_k^{(1)}) = -0.5 \sin \tilde{\psi}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(u_0, v_0) = \begin{cases} 0.5 \sin \gamma_0 (1 + (\sin 2\gamma_0)/(2\gamma_0)), & \alpha > 0, \\ 0.5 \operatorname{sh} \gamma_0 (1 + (\operatorname{sh} 2\gamma_0)/(2\gamma_0)), & \alpha < 0. \end{cases}$$

Выписанная система приводится к биортонормированному виду

$$u_k^{(2)}(x) = \sin 2\gamma_k x, \quad v_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)} \cos(\gamma_k(1 - 2x)),$$

$$u_k^{(1)}(x) = \sin 2\pi k x, \quad v_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)} \cos(2\pi k x + \tilde{\psi}_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin 2 \gamma_0 x, \quad v_0(x) = C_0 \cos(\gamma_0(1 - 2x)), \quad \alpha > 0, \\ u_0(x) &= \operatorname{sh} 2 \gamma_0 x, \quad v_0(x) = C_0 \operatorname{ch}(\gamma_0(1 - 2x)), \quad \alpha < 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$C_k^{(1)} = -2(\sin \tilde{\psi}_k)^{-1}, \quad C_k^{(2)} = 2((\sin \gamma_k) (1 + \operatorname{sinc} 2\gamma_k))^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$C_0 = 2((\sin \gamma_0) (1 + \operatorname{sinc} 2\gamma_0))^{-1}, \quad (\alpha > 0),$$

$$C_0 = 2((\operatorname{sh} \gamma_0) (1 + \operatorname{shc} 2\gamma_0))^{-1}, \quad (\alpha < 0),$$

причем $\sin c\gamma = (\sin \gamma)/\gamma$, $\operatorname{sh} c\gamma = (\operatorname{sh} \gamma)/\gamma$.

Ни система собственных функций $u_k(x)$ оператора L , ни биортогональная к ней система собственных функций оператора L^* не образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$.

Рассмотрим вспомогательную систему функций $W_\alpha = \{w_j(x), j = 0, 1, \dots\}$, элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{2k-1}(x) &= (u_k^{(2)}(x) - u_k^{(1)}(x))(2\delta_k)^{-1} = (\sin c\delta_k x) \cos(2\pi kx + \delta_k x), \\ w_{2k}(x) &= u_k^{(1)}(x) = \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots, \quad w_0(x) = u_0(x)/2\gamma_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для системы функций W_α существует биортогональная к ней система функций $R_\alpha = \{r_i(x), i = 0, 1, \dots\}$, элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} r_{2k}(x) &= v_k^{(2)}(x) + v_k^{(1)}(x), \\ r_{2k-1}(x) &= 2 \delta_k v_k^{(2)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad r_0(x) = 2 \gamma_0 v_0(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Системы функций W_α , R_α образуют базисы Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$, а системы собственных функций для операторов L и L^* являются полными в том же пространстве.

В работе [4], как указывалось выше, для случая $\alpha = 0$ построена система собственных и присоединенных функций $W_0 = \{X_j(x), j = 0, 1, \dots\}$, элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} X_{2k-1}(x) &= x \cos(2\pi kx), \quad X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \\ k &= 1, 2, \dots, \quad X_0(x) = x. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для системы функций W_0 существует биортогональная к ней система функций $R_0 = \{Y_i(x), i = 0, 1, \dots\}$, элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} Y_{2k-1}(x) &= 4 \cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1 - x) \times \\ &\times \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots, \quad Y_0(x) = 2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Системы W_0 , R_0 образуют базисы Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$ и для любой функции $\phi(x) \in L_2(0, 1)$ справедлива оценка

$$r \|\phi\|_{L_2}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 \leq R \|\phi\|_{L_2}^2, \quad (1.13)$$

где $r = 3/4$, $R = 16$, $\phi_k = (\phi, Y_k)_{L_2}$.

Более того, в [7] доказано, что в пространстве $L_2(0, 1)$ можно ввести эквивалентную норму по правилу

$$\|\phi\|_D^2 = (D\phi, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2, \quad (1.14)$$

где $D : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ — некоторый положительно определенный оператор.

В [6] эти результаты распространены на системы W_α , R_α . Здесь следует отметить, что системы W_α , R_α не переходят в системы W_0 , R_0 при $\alpha \rightarrow 0$.

Таким образом, в работе [6] для краевой задачи (1.1)–(1.3) построено формальное представление ее решения в виде ряда по системам W_α , R_α и установлено, что этот ряд является единственным классическим ее решением, которое устойчиво по начальным условиям относительно эквивалентной нормы. При этом следует учесть отсутствие априорных оценок на решение, подобных задачам с локальными краевыми условиями.

При постановке для таких краевых задач задач оптимального управления следует каждый раз обращать внимание на разрешимость последних, так как методы "L₂-теории" здесь не работают.

2. Распределенное управление с эквивалентной нормой

Пусть управляемый процесс $y(x, t)$ описывается краевой задачей

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p(x, t), \quad (x, t) \in Q = \{0 < x < 1, t_0 < t \leq T < \infty\}, \quad (2.1)$$

$$y(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1, t)}{\partial x} + \alpha y(1, t), \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Требуется найти управление $p^*(x, t) \in C(Q)$, которое переводит систему (2.1)–(2.3) в состояние

$$y(x, T) = \psi(x) \quad (2.4)$$

и минимизирует функционал

$$I(p) = \int_{t_0}^T \|p\|_D^2 dt. \quad (2.5)$$

Заметим, что в задачах с минимальной энергией в случае локальных краевых условий [3] в качестве критерия выбирается функционал

$$I_1(p) = \int_Q p^2(x, t) dx dt, \quad (2.6)$$

который ассоциируется с полной энергией системы. Критерии (2.5), (2.6) эквивалентны в смысле (1.13). Поэтому далее будем рассматривать задачу с критерием (2.5), так как при этом удастся получить в определенном смысле окончательный результат. Особенности решения задачи с критерием (2.6) будут рассмотрены в конце этого пункта.

Теорема 1. Пусть в задаче с минимальной энергией (2.1)–(2.5) функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат области определения оператора L и $\alpha \neq 0$. Кроме того, предположим, что $\psi(x) \in C^4(0,1)$, $\varphi(x) \in C^3(0,1)$,

$$\frac{d^2\psi(1)}{dx^2} = \frac{d^2\psi(0)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\psi(1)}{dx^3} - \frac{d^3\psi(0)}{dx^3} = 0; \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2\varphi(1)}{dx^2} + \frac{d^2\varphi(0)}{dx^2} = 0. \quad (2.8)$$

Тогда задача с минимальной энергией имеет единственное непрерывное на $\bar{Q}$ решение и это решение представимо в виде: $p^*(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) w_k(x)$, где

$$p_0(t) = \frac{2 \lambda_0 \mu_0 \exp(-\lambda_0(T-t))}{1 - \exp(-2\lambda_0(T-t_0))}, \quad (2.9)$$

$$p_{2k-1}(t) = \mu_{2k-1} \frac{[h_{k,2}, h_{k,2}] \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)) + [h_{k,1}, h_{k,2}] \theta_k(T-t)}{\Delta_k} - \mu_{2k} \frac{[h_{k,1}, h_{k,2}] \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)) + [h_{k,1}, h_{k,1}] \theta_k(T-t)}{\Delta_k}, \quad (2.10)$$

$$p_{2k}(t) = \frac{\mu_{2k} [h_{k,1}, h_{k,1}] - \mu_{2k-1} [h_{k,1}, h_{k,2}]}{\Delta_k} \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)), \quad k \geq 1. \quad (2.11)$$

В (2.9)–(2.11) обозначено

$$\mu_0 = \psi_0 - \varphi_0 \exp(-\lambda_0(T-t_0)), \quad (2.12)$$

$$\mu_{2k-1} = \psi_{2k-1} - \varphi_{2k-1} \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t_0)), \quad (2.13)$$

$$\mu_{2k} = \psi_{2k} + \theta_k(T-t_0) \varphi_{2k-1} - \varphi_{2k} \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t_0)), \quad (2.14)$$

φ_k , ψ_k — коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в ряды по системе W_α ,

$$\theta_k(t) = \frac{\exp(-\lambda_k^{(1)} t) - \exp(-\lambda_k^{(2)} t)}{2 \delta_k}; \quad (2.15)$$

$$[h_{k,i}, h_{k,j}] = \int_{t_0}^T h'_{k,i}(t) h_{k,j}(t) dt, \quad (2.16)$$

$$\Delta_k = [h_{k,1}, h_{k,1}] [h_{k,2}, h_{k,2}] - [h_{k,1}, h_{k,2}]^2, \quad (2.17)$$

$$h'_{k,1}(t) = (\exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)), 0), \quad (2.18)$$

$$h'_{k,2}(t) = (-\theta_k(T-t), \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t))). \quad (2.19)$$

Значение критерия дано сходящимся рядом

$$I(p^*) = I_0(p_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{I}_k(p_{2k-1}, p_{2k}), \quad (2.20)$$

где

$$I_0(p_0) = 2 \frac{\lambda_0 \mu_0^2}{1 - \exp(-2\lambda_0(T - t_0))}, \quad (2.21)$$

$$\hat{I}_k(p_{2k-1}, p_{2k}) = \int_{t_0}^T (p_{2k-1}^2(t) + p_{2k}^2(t)) dt, \quad (2.22)$$

а оптимальная траектория, задаваемая рядом

$$y^*(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t) w_k(x), \quad (2.23)$$

где функции $y_k(t)$ определяются как решения задач Коши

$$\dot{y}_{2k-1}(t) + \lambda_k^{(2)} y_{2k-1}(t) = p_{2k-1}(t), \quad y_{2k-1}(t_0) = \varphi_{2k-1}; \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{2k}(t) + \lambda_k^{(1)} y_{2k}(t) &= \frac{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}}{2\delta_k} y_{2k-1}(t) + p_{2k}(t), \\ y_{2k}(t_0) &= \varphi_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\dot{y}_0(t) + \lambda_0 y_0(t) = p_0(t), \quad y_0(t_0) = \varphi_0, \quad (2.26)$$

является классическим решением краевой задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Запишем функцию $\psi(x)$ в виде ряда по базису W_α

$$\psi(x) = w_0(x) \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (w_{2k-1}(x) \psi_{2k-1} + w_{2k}(x) \psi_{2k}), \quad \psi_k = (\psi, r_k). \quad (2.27)$$

Заметим, что если произвольная функция $\varrho(x)$ принадлежит области определения оператора L (L^*), то для коэффициентов ее разложения по системе W_α (R_α), согласно [6], справедливы оценки

$$|\rho_k| \leq \frac{C}{k^2}, \quad k = 1, \dots. \quad (2.28)$$

Задача (2.1)–(2.5) эквивалентна такой задаче: найти минимум функционала

$$I(p) = \int_{t_0}^T \sum_{k=0}^{\infty} p_k^2(t) dt$$

при ограничениях (2.24)–(2.26).

Эта задача редуцируется в последовательность конечномерных задач. При $k = 0$ будем иметь такую задачу: минимизировать функционал

$$I_0(p_0) = \int_{t_0}^T p_0^2(t) dt \quad (2.29)$$

при ограничении

$$\int_{t_0}^T \exp(-\lambda_0(T - t)) p_0(t) dt = \mu_0. \quad (2.30)$$

При $k > 0$ следует минимизировать функционал

$$\hat{I}_k(p_{2k-1}, p_{2k}) = \int_{t_0}^T (p_{2k-1}^2(t) + p_{2k}^2(t)) dt \quad (2.31)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)) p_{2k-1}(t) dt &= \mu_{2k-1}, \\ \int_{t_0}^T [-\theta_k(T-t) p_{2k-1}(t) + \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)) p_{2k}(t)] dt &= \mu_{2k}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

При построении моментных равенств (2.32) использовалась фундаментальная матрица $\mathcal{W}_k(t, \tau)$ для системы (2.24)–(2.25), которая имеет вид:

$$\mathcal{W}_k(t, \tau) = \begin{pmatrix} \exp(-\lambda_k^{(2)}(t-\tau)) & 0 \\ -\theta_k(t-\tau) & \exp(-\lambda_k^{(1)}(t-\tau)) \end{pmatrix}.$$

Задачи (2.29)–(2.32) представляют собой конечномерные задачи с минимальной энергией. Решение первой из них, согласно [3], задается формулами (2.9), (2.21). Оптимальное управление во второй задаче, согласно [2], ищется в виде:

$$\hat{p}_k(t) = \sum_{j=1}^2 \beta_{k,j} h_{k,j}(t),$$

где $\hat{p}'_k(t) = (p_{2k-1}(t), p_{2k}(t))$, а коэффициенты $\beta_{k,j}$ однозначно определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \beta_{k,1} [h_{k,1}, h_{k,1}] + \beta_{k,2} [h_{k,1}, h_{k,2}] &= \mu_{2k-1}, \\ \beta_{k,1} [h_{k,1}, h_{k,2}] + \beta_{k,2} [h_{k,2}, h_{k,2}] &= \mu_{2k}. \end{aligned}$$

Вычислим скалярные произведения $[h_{k,i}, h_{k,j}]$:

$$\begin{aligned} [h_{k,1}, h_{k,1}] &= \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T-t_0))}{2\lambda_k^{(2)}}, \\ [h_{k,1}, h_{k,2}] &= -\frac{1}{2\delta_k} \left(\frac{1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T-t_0))}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T-t_0))}{2\lambda_k^{(2)}} \right), \\ [h_{k,2}, h_{k,2}] &= \frac{1}{4\delta_k^2} \left(\frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T-t_0))}{2\lambda_k^{(1)}} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T-t_0))}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} + \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T-t_0))}{2\lambda_k^{(2)}} \right) + \\ &\quad + \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T-t_0))}{2\lambda_k^{(1)}}. \end{aligned}$$

Определитель выписанной системы имеет вид:

$$\Delta_k = \frac{1 + 4\delta_k^2}{4\delta_k^2} \frac{(1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0)))(1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{4\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}} -$$

$$- \frac{1}{4\delta_k^2} \frac{(1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0)))^2}{(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})^2}.$$

Тогда управления принимают вид (2.10)–(2.11).

Далее рассмотрим случай, когда $\alpha > 0$. Оценим дроби $[h_{k,i}, h_{k,j}]/\Delta_k$. Так как

$$\Delta_k \geq \frac{1}{4^2 \delta_k^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}} (2 \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0)) -$$

$$- \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0)) - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0))) = \frac{1}{4^2 \delta_k^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}} \times$$

$$\times (1 - (\exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0)) - \exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))^2) \geq$$

$$\geq \frac{(1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0)))(1 - \exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{4^2 \delta_k^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}},$$

то

$$\frac{[h_{k,1}, h_{k,1}]}{\Delta_k} \leq \frac{C \lambda_k^{(1)}(1 + \exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0))},$$

$$\frac{|[h_{k,1}, h_{k,2}]|}{\Delta_k} \leq \frac{1}{2\delta_k \Delta_k} \left(\frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}} \right) \leq \frac{C \lambda_k^{(2)}(1 + \exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0))},$$

$$\frac{|[h_{k,2}, h_{k,2}]|}{\Delta_k} \leq \frac{1}{4\delta_k^2 \Delta_k} \left(\frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(1)}} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{1 - \exp(-(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)})(T - t_0))}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} + \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(2)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(2)}} \right) +$$

$$+ \frac{1 - \exp(-2\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}{2\lambda_k^{(1)} \Delta_k} < \frac{C \lambda_k^{(2)}(1 + \exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)))}{1 - \exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0))}.$$

Тогда для выписанных коэффициентов управления получим оценки:

$$|p_{2k-1}(t)| \leq |\mu_{2k-1}| \frac{|[h_{k,2}, h_{k,2}]| + |[h_{k,1}, h_{k,2}]| C/k}{|\Delta_k|} +$$

$$+ |\mu_{2k}| \frac{|[h_{k,1}, h_{k,2}]| + |[h_{k,1}, h_{k,1}]| C/k}{|\Delta_k|} \leq C (|\mu_{2k-1}| + |\mu_{2k}|) \lambda_k^{(2)},$$

$$|p_{2k}(t)| = \frac{|\mu_{2k}| |[h_{k,1}, h_{k,1}]| + |\mu_{2k-1}| |[h_{k,1}, h_{k,2}]|}{|\Delta_k|} \leq C (|\mu_{2k-1}| + |\mu_{2k}|) \lambda_k^{(2)}.$$

В приведенных оценках использовано неравенство из [6]:

$$0 \leq \theta_k(t) \leq \frac{C}{k}.$$

Рассмотрим ряд

$$\hat{p}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (p_{2k-1}(t) w_{2k-1}(x) + p_{2k}(t) w_{2k}(x)). \quad (2.33)$$

Так как $|w_j(x)| \leq 1$, $j \geq 1$, то

$$|\hat{p}(x, t)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} (|\psi_{2k-1}| + |\psi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| (\exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)) + \theta_k(T - t_0)) + |\varphi_{2k}| \exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0))).$$

Так как числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} (|\varphi_{2k-1}| \exp(-\lambda_k^{(2)}(T - t_0)) + |\varphi_{2k}| \exp(-\lambda_k^{(1)}(T - t_0)))$$

сходится, то для равномерной сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (2.33), нужно убедиться в сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} (|\psi_{2k-1}| + |\psi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| \theta_k(T - t_0)). \quad (2.34)$$

Ряд (2.34) сходится. Действительно, в силу определения ψ_{2k-1} , получим:

$$\psi_{2k-1} = (\psi, r_{2k-1}) = 2\delta_k (\psi, v_k^{(2)}) = -2\delta_k C_k^{(2)} \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}, \cos(\gamma_k(1 - 2x)) \right).$$

Отдельно преобразуем скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}, \cos(\gamma_k(1 - 2x)) \right) &= -\frac{1}{2\gamma_k} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \sin(\gamma_k(1 - 2x))|_0^1 + \\ &+ \frac{1}{4\gamma_k^2} \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} \cos(\gamma_k(1 - 2x))|_0^1 - \frac{1}{4\gamma_k^2} \left(\frac{d^4\psi}{dx^4}, \cos(\gamma_k(1 - 2x)) \right). \end{aligned}$$

Тогда, в силу (2.7), будем иметь:

$$\psi_{2k-1} = \frac{1}{(\lambda_k^{(2)})^2} \left(\frac{d^4\psi}{dx^4}, r_{2k-1} \right).$$

Возвращаясь к ряду (2.34), для его первой суммы получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} |\psi_{2k-1}| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

так как $|r_k(x)| \leq C_r$, $k = 0, 1, \dots$ в силу необходимого условия базисности системы функций R_α (элементы системы должны быть почти нормированными).

Для второй суммы ряда (2.34) будет справедливым аналогичный результат. Действительно, согласно определению ψ_{2k} , будем иметь:

$$\begin{aligned} \psi_{2k} &= (\psi, r_{2k}) = (\psi, v_k^{(2)} + v_k^{(1)}) = (L\psi, \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} v_k^{(1)} + \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} v_k^{(2)}) = \\ &= (L\psi, \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} C_k^{(1)} \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k) + \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} C_k^{(2)} \cos(\gamma_k(1 - 2x))). \end{aligned}$$

Второе скалярное произведение было исследовано выше. Поэтому остановимся на первом скалярном произведении, т. е.:

$$\begin{aligned} (\frac{d^2\psi}{dx^2}, \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)) &= \frac{1}{2\pi k} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \sin(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)|_0^1 + \frac{1}{(2\pi k)^2} \times \\ &\times \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)|_0^1 - \frac{1}{(2\pi k)^2} (\frac{d^4\psi}{dx^4}, \cos(2\pi kx + \tilde{\psi}_k)). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая свойства функции $\psi(x)$, получим:

$$\begin{aligned} \psi_{2k} &= (\frac{d^4\psi}{dx^4}, \frac{1}{(\lambda_k^{(1)})^2} r_{2k} + \frac{1}{2\delta_k} (\frac{1}{(\lambda_k^{(2)})^2} - \frac{1}{(\lambda_k^{(1)})^2}) r_{2k-1}) = \\ &= \frac{1}{(\lambda_k^{(1)})^2} (\frac{d^4\psi}{dx^4}, r_{2k} + \frac{(\lambda_k^{(1)})^2 - (\lambda_k^{(2)})^2}{2\delta_k (\lambda_k^{(2)})^2} r_{2k-1}). \end{aligned}$$

Так как

$$|\frac{(\lambda_k^{(1)})^2 - (\lambda_k^{(2)})^2}{2\delta_k (\lambda_k^{(2)})^2}| < \frac{C}{k},$$

то

$$|\psi_{2k}| < \frac{C}{k^4}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} |\psi_{2k}| < \infty.$$

Третья сумма ряда (2.34) сходится в силу свойств функций $\varphi(x)$, $\theta_k(t)$ (см. сходимости первой суммы этого ряда).

Тем самым ряд (2.33) определяет непрерывную на $\bar{Q}$ функцию $\hat{p}(x, t)$ и при этом сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{I}_k(p_{2k-1}, p_{2k}).$$

Таким образом, мы доказали, что оптимальное управления $p^*(x, t)$ непрерывно в области $\bar{Q}$ и сходимость ряда, определяющего значение критерия качества.

Аналогично [6] устанавливаем, что ряд (2.23) определяет единственное классическое решение краевой задачи (2.1)–(2.3).

Если $\alpha < 0$, то получим тот же результат, так как при этом в приведенных оценках следует заменить собственные числа $\lambda_k^{(2)}$ на числа $\lambda_k^{(1)}$. $\square$

Рассмотрим ту же задачу с минимальной энергией, но с критерием (2.6). В этом случае задача не распадается на последовательность одномерных и двумерных задач. Действительно, учитывая представление функции $p(x, t)$ в виде ряда по базису W_α , критерий (2.6) примет вид:

$$I_1(p) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{t_0}^T p_i(t) p_j(t) \mathcal{A}_{i,j} dt, \quad (2.35)$$

где

$$\mathcal{A}_{i,j} = \int_0^1 w_i(x) w_j(x) dx.$$

Кроме того, при этом должны выполняться моментные равенства (2.30), (2.32).

Из [1] следует, что матрица $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty}$ представляет собой линейный ограниченный обратимый оператор в l_2 .

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(t_0, T)$, элементами которого выступают последовательности $\tilde{p}(t) = \{p_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ с нормой

$$\|\tilde{p}\|_{\mathcal{L}_2(t_0, T)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \int_{t_0}^T p_i^2(t) dt}. \quad (2.36)$$

В силу [6] верна оценка

$$I_1(p) \geq \gamma_1 \|\tilde{p}\|_{\mathcal{L}_2(t_0, T)}^2.$$

Тогда матрица $\mathcal{A}$ представляет собой положительно-определенный оператор в пространстве $\mathcal{L}_2(t_0, T)$ и определяет в нем энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}}(t_0, T)$ с нормой вида

$$[\tilde{p}]_{H_{\mathcal{A}}}^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{t_0}^T p_i(t) p_j(t) \mathcal{A}_{i,j} dt.$$

Из [3] следует, что $H_{\mathcal{A}}(t_0, T) \subseteq \mathcal{L}_2(t_0, T)$. Перепишем задачу с минимальной энергией (2.35), (2.30), (2.32) в терминах пространства $H_{\mathcal{A}}(t_0, T)$. С этой целью определим последовательности $\varrho^l(t) \in H_{\mathcal{A}}(t_0, T)$, $l = 0, 1, \dots$ как решения уравнений

$$\mathcal{A} \varrho^l(t) = f^l(t), \quad l = 0, 1, \dots, \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} f^0(t) &= \{\exp(-\lambda_0(T-t)), 0, \dots\}, \\ f^{2k-1}(t) &= \{\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)), 0, \dots\}, \end{aligned}$$

$$f^{2k}(t) = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{2k-2}, -\theta_k(T-t), \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)), 0, \dots\}, \quad k = 1, \dots$$

Так как $f^l(t) \in H_{\mathcal{A}}(t_0, T)$, то и $\varrho^l(t) \in H_{\mathcal{A}}(t_0, T)$, $l = 0, 1, \dots$. Тогда задача с минимальной энергией формулируется таким образом: минимизировать критерий

$$I_1(p) = [\tilde{p}]_{H_{\mathcal{A}}}^2 \quad (2.38)$$

при ограничениях

$$[\varrho^l, \tilde{p}]_{H_{\mathcal{A}}} = \mu_l, \quad l = 0, 1, \dots \quad (2.39)$$

Предположим, что последовательности $\{\varrho^l(t)\}_{l=0}^{\infty}$ образуют базис пространства $H_{\mathcal{A}}(t_0, T)$. Тогда решение задачи (2.38)–(2.39) можна представить в виде:

$$\tilde{p}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varrho^j(t),$$

где числа α_j однозначно определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [\varrho^k, \varrho^j]_{H_{\mathcal{A}}} = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

При этом последовательность $\tilde{p}(t)$ должна быть такой, чтобы индуцируемое ею оптимальное управление $p(x, t)$ было непрерывным.

Изложенный алгоритм решения задачи с минимальной энергией носит формальный характер, так как требует обоснования на каждом шаге. Последнее упирается в изучение свойств матриц $\mathcal{A}^{-1}$ и $\{[\varrho^k, \varrho^j]_{H_{\mathcal{A}}}, k, j = 0, 1, \dots\}^{-1}$. Этот вопрос пока остается открытым. Поэтому предложенный здесь подход к решению задачи с минимальной энергией с использованием критерия качества (2.5) является целесообразным.

Замечание 1. В случае $\alpha = 0$ получим результат, аналогичный теореме 1.

3. Разделенное управление

Пусть управляемый процесс $y(x, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g(x) p(t), \quad (3.1)$$

с краевыми условиями (2.2)–(2.3), где $g(x) \in C(0, 1)$.

Требуется найти управление $p^*(t) \in C(t_0, T)$, доставляющее минимум критерию качества

$$J(p) = \int_{t_0}^T p^2(t) dt \quad (3.2)$$

и удовлетворяющее условию (2.4) ($\alpha > 0$.)

Учитывая представление решения краевой задачи (3.1), (2.2)–(2.3) в виде ряда по системе W_{α} , получим такую формулировку задачи с минимальной

энергией: найти $p^*(t) \in C(t_0, T)$, доставляющее минимум (3.2) при ограничениях

$$g_0 \int_{t_0}^T \exp(-\lambda_0(T-t)) p(t) dt = \mu_0, \quad (3.3)$$

$$g_{2k-1} \int_{t_0}^T \exp(-\lambda_k^{(2)}(T-t)) p(t) dt = \mu_{2k-1},$$

$$\int_{t_0}^T [-\theta_k(T-t) g_{2k-1} + \exp(-\lambda_k^{(1)}(T-t)) g_{2k}] p(t) dt = \mu_{2k}, \quad k > 0, \quad (3.4)$$

где g_j — коэффициенты разложения функции $g(x)$ в ряд по системе W_α .

Переформулируем проблему моментов (3.3) - (3.4). С этой целью введем две последовательности: 1) $b = \{b_j\}_{j=0}^\infty$, где $b_0 = \mu_0/g_0$; $b_{2k-1} = \mu_{2k-1}/g_{2k-1}$,

$$b_{2k} = \frac{2 \delta_k \mu_{2k} - \mu_{2k-1}}{2 \delta_k g_{2k} - g_{2k-1}}, \quad k = 1, \dots$$

2) $\chi = \{\chi_j\}_{j=0}^\infty$, где $\chi_0 = \lambda_0$; $\chi_{2k-1} = \lambda_k^{(1)}$, $\chi_{2k} = \lambda_k^{(2)}$, $k = 1, \dots$.

Тогда проблема моментов (3.3)–(3.4) принимает вид:

$$\int_{t_0}^T \exp(-\chi_j(T-t)) p(t) dt = b_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Пусть $b \in l_2$. Тогда мы полностью попадаем в условия разрешимости задачи с минимальной энергией для параболического уравнения с локальными краевыми условиями, изложенные в [3]. Действительно, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_k} < \infty,$$

то, согласно теореме Мюнца [5], система функций $\{\exp(-\chi_j(T-t))\}_{j=0}^\infty$ не является полной в $L_2(t_0, T)$. Решение задачи с минимальной энергией (3.2), (3.5) ищется в полном (относительно метрики пространства $L_2(t_0, T)$) пространстве $H_\lambda(t_0, T) \subset L_2(t_0, T)$ в виде: $p(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k \exp(-\chi_k(T-t))$, где числовая последовательность $c = \{c_k\}_{k=0}^\infty$ определяется как единственное решение системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{k,j} c_k = b_j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$M_{k,j} = \frac{1 - \exp(-(\chi_k + \chi_j)(T-t_0))}{\chi_k + \chi_j}, \quad \sum_{k,j=0}^{\infty} M_{k,j} c_k c_j < \infty.$$

Матрица M определяет в l_2 положительный оператор. Поэтому последовательность $\{c_k\}$ принадлежит энергетическому пространству M_λ положительного оператора M ($l_2 \subset M_\lambda$).

Такой результат, вообще говоря, нас не устраивает: нет достаточных условий разрешимости не только в $C(t_0, T)$, но и в $L_2(t_0, T)$. Но большего пока достичь не удастся.

Замечание 2. В случае $\alpha \leq 0$ результат будет аналогичным.

Библиографические ссылки

1. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.
2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление линейными системами. — К. : Наукова думка, 1988. — 278 с.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. - М. : Наука, 1978. — 463 с.
4. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977. — Т. 13, N 2. — С. 294–304.
5. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. — М. : Наука, 1966. — 448 с.
6. *Мокин А. Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения, 2009. — Т. 45, N 1. — С. 123–137.
7. *Мокин А. Ю.* Согласованность норм при исследовании разностных схем для задачи Самарского–Ионкина // Дифференциальные уравнения, 2006. — Т. 42, N 7. — С. 969–978.

Надійшла до редакції 27.09.2009

УДК 681.31

TOPOLOGICAL ASPECTS IN VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

P. I. Kogut*, R. Manzo**, I. V. Nechay***

* *Department of Differential Equations Dnipropetrovsk National University Naukova str., 13, 49050 Dnipropetrovsk, Ukraine E-mail: p.kogut@i.ua*

** *Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata Università di Salerno Via Ponte don Melillo, 84084 Fisciano (SA), Italy. E-mail: manzo@diima.unisa.it*

*** *Department of Technical Cybernetics Dnipropetrovsk Technical University Acad. Lazaryan str., 2, 49010 Dnipropetrovsk, Ukraine. E-mail: i.nechay@i.ua*

In this paper we study vector optimization problems in partially ordered Banach spaces. We suppose that the objective mapping possesses a weakened property of lower semicontinuity and make no assumptions on the interior of the ordering cone. We derive sufficient conditions for existence of efficient solutions of the above problems and discuss the role of topological properties of the objective space. We discuss the scalarization of vector optimization problems when the objective functions are vector-valued mappings with a weakened property of lower semicontinuity. We also prove the existence of the so-called generalized efficient solutions via the scalarization process. All principal notions and assertions are illustrated by numerous examples.

Key words. Vector optimization problem, efficient solutions, objective mapping, property of lower semicontinuity, generalized efficient solutions.

1. Introduction

The main goal of this paper is to discuss one class of vector optimization problems in Banach spaces in the case when the objective vector-valued mapping possesses a weakened property of lower semicontinuity. The classical setting of vector optimization problems usually consists in the investigation of “optimal” elements of a non-empty subset of a partially ordered objective space, where by “optimal” elements one mainly means the minimal elements or several variants of this concept, for example, strongly minimal, properly minimal and weakly minimal elements. Therefore, an important aspect in the vector optimization is to find conditions which guarantee existence of the so-called efficient solutions, which are defined as inverse images of the minimal elements of the image set. The following result is well-known: *if the image of admissible solutions in an objective Banach space is compact then the set of efficient solutions is non-empty*. Since the compactness is a very restrictive assumption, at least in an infinite-dimensional setting, many authors have tried to weaken it. The typical way to do it is to endow the objective mapping with some lower semicontinuity properties. In the vector-valued case there are several possible ways to extend the “scalar” notion of lower

semicontinuity (see, for example, [3, 4, 5, 7, 8, 13, 16, 20]). We could mention the lower semicontinuity, quasi lower semicontinuity, and order lower semicontinuity. However, the above properties for the objective functions may fail at an efficient solution, even for simple vector optimization problems with non-empty solution sets. This is an atypical situation for the scalar case

$$I(x^*) = \inf \{I(x) : x \in X\}, \quad (1.1)$$

where each solution x^* is always a point of lower semicontinuity of the cost functional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$.

The next problem, which motivated our efforts in this field, concerns the following observation: if the scalar problem (1.1) has a non-empty set of solutions, then

$$\inf \{I(x) : x \in X\} = \min \{I(x) : x \in X\} = \min [\text{closure} \{I(x) : x \in X\}].$$

However, in the case of vector optimization, the typical situation is:

$$\text{Min}(S) \neq \emptyset, \text{Min}[\text{closure}(S)] \neq \emptyset, \text{ and } \text{Min}(S) \cap \text{Min}[\text{closure}(S)] = \emptyset,$$

where by $\text{Min}(S)$ we symbolically denote the family of all minimal elements of a subset S .

Thus our prime interest in this paper is to consider vector optimization problems in a new setting, which involves topological properties of the objective space, and discuss the problem of their scalarization. We deal with the case when the objective mappings take values in a real Banach space Y partially ordered by a pointed cone Λ with possibly empty interior. In contrast to the classical setting of the vector optimization problem

$$\text{Minimize } f(x) \text{ with respect to the cone } \Lambda \text{ subject to } x \in X_\partial, f : X \rightarrow Y,$$

we study the problem in the following formulation:

$$\text{Realize } \inf_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) \quad (1.2)$$

and associate this problem with the quaternary $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$, where the essential counterpart is the choice of the topology τ on the objective space Y .

We also extend the concept of lower semicontinuity to vector-valued mappings, which is compatible with optimization problems in the form (1.2), and discuss the existence of the so-called (Λ, τ) -efficient solutions to the problem (1.2). In particular, we show that the extended concept of lower semicontinuity does not fail at (Λ, τ) -efficient solutions, however the topological properties of the spaces (X, σ) and (Y, τ) , where this problem is considered, play an essential role. In view of this, our main intension deals with the scalarization of vector optimization problems (1.2) with the so-called $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous mappings, using the “simplest” method of the “weighted sum”. We show that in this case one of the fundamental requirements on the scalarizing vector optimization problems (according to Sawaragi et al. [18]): *solutions to the scalarized optimization problem must also be minimal solutions to the original vector optimization problem*, may

not hold. Moreover, we show that for $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous mappings $f : X_\partial \rightarrow Y$ a situation is possible, when none of the scalar functions, obtained by “weighted sum” approach, is sequentially lower semicontinuous. For this reason, we extend the notion of (Λ, τ) -efficient solutions to the so-called generalized solutions of the vector optimization problem. We study their main properties and derive sufficient conditions when the generalized solutions can be obtained via the scalarization process of (1.2).

2. Notation and Preliminaries

Let X and Y be two real Banach spaces. We assume that X is reflexive and Y is dual to some separable Banach space V (that is $Y = V^*$). We suppose that these spaces are endowed with some topologies $\sigma = \sigma(X)$ and $\tau = \tau(Y)$, respectively. By default σ is always associated with the weak topology of X , whereas τ is associated with the weak-* topology of Y . For a subset $A \subset Y$ we denote by $\text{int}_\tau A$ and $\text{cl}_\tau A$ its interior and closure with respect to the τ -topology, respectively. We will omit this index if no confusion may occur. Let Λ be a τ -closed convex pointed cone in Y . No assumption is imposed on the topological interior of Λ . Throughout this paper, we suppose that Y is partially ordered with the ordering cone Λ . We denote with $\leq_\Lambda$ a partial ordering introduced by the cone Λ , that is, for any elements $y, z \in Y$, we will write $y \leq_\Lambda z$ whenever $z \in y + \Lambda$ and $y <_\Lambda z$ for $y, z \in Y$, if $z - y \in \Lambda \setminus \{0_Y\}$. We say that a sequence $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset Y$ is decreasing and we use the notation $y_k \searrow$ whenever, for all $k \in \mathbb{N}$, we have $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k$. We also say that a sequence $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset Y$ is bounded below if there exists an element $y^* \in Y$ such that $y^* \leq_\Lambda y_k$ for all $k \in \mathbb{N}$.

For the investigation of “optimal” elements of a non-empty subset S of the partially ordered space Y one is mainly interested in minimal or maximal elements of S .

Definition 1. (see [11]) An element $y^* \in S \subset Y$ is said to be minimal of the set S , if there is no $y \in S$ such that $y \leq_\Lambda y^*$, $y \neq y^*$, that is

$$S \cap (y^* - \Lambda) = \{y^*\}.$$

Definition 2. (see [11]) An element $y^* \in S \subset Y$ is said to be weakly minimal of the set S , if

$$S \cap (y^* - \text{cor}(\Lambda)) = \emptyset,$$

where by $\text{cor}(\Lambda)$ we denote the algebraic interior of Λ , that is,

$$\begin{aligned} \text{cor}(\Lambda) &:= \{\hat{z} \in V \mid \forall z \in V \text{ there is an } \hat{\alpha} > 0 \text{ with} \\ &\quad \hat{z} + \alpha z \in \Lambda \text{ for all } \alpha \in [0, \hat{\alpha}]\}. \end{aligned}$$

Let $\text{Min}_\Lambda(S)$ denote the family of all minimal elements of S . We say that an element y^* is the *ideal minimal point* (or a strongly minimal element) of the set S , if $y^* \in S$ and $y^* \leq_\Lambda y$ for every $y \in S$.

Let us introduce two singular elements $-\infty_\Lambda$ and $+\infty_\Lambda$ in Y . We assume that these elements satisfy the following conditions:

$$1) -\infty_\Lambda \preceq y \preceq +\infty_\Lambda, \forall y \in Y; \quad 2) +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0_Y.$$

Let $Y^\bullet$ denote a semi-extended Banach space: $Y^\bullet = Y \cup \{+\infty_\Lambda\}$ assuming that

$$\|+\infty_\Lambda\|_Y = +\infty \quad \text{and} \quad y + \lambda(+\infty_\Lambda) = +\infty \quad \forall y \in Y \quad \text{and} \quad \forall \lambda > 0.$$

The following concept is a crucial point in this paper.

Definition 3. We say that a set E is the efficient infimum of a set $S \subset Y$ with respect to the τ topology of Y (or shortly (Λ, τ) -infimum) if E is the collection of all minimal elements of $\text{cl}_\tau S$ in the case when this set is non-empty, and E is equal to $\{-\infty_\Lambda\}$ otherwise.

Hereinafter we denote the (Λ, τ) -infimum for S by $\text{Inf}^{\Lambda, \tau} S$. Thus, in view of the definition given above, we have

$$\text{Inf}^{\Lambda, \tau} S := \begin{cases} \text{Min}_\Lambda(\text{cl}_\tau S), & \text{Min}_\Lambda(\text{cl}_\tau S) \neq \emptyset \\ -\infty_\Lambda, & \text{Min}_\Lambda(\text{cl}_\tau S) = \emptyset. \end{cases}$$

The following example shows the significance of this definition and compares it with the notion of minimal elements.

Example 1. Let $Y = \mathbb{R}^2$ and let $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ be the natural ordering cone of positive elements in $\mathbb{R}^2$. Suppose that the set $S \subset Y$ is given as $S = \cup_{i=1}^3 X_i$, where

$$\begin{aligned} X_1 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 \geq 1, z_2 > 3, z_1 + z_2 \leq 5\}, \\ X_2 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 > 2, z_2 > 2, z_1 + z_2 \leq 5\}, \\ X_3 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 > 3, z_2 \geq 4, z_1 + z_2 \leq 5\}, \\ X_4 &= \{(2; 3), (3; 2)\} \end{aligned}$$

(see Fig. 1). It is essential that the set S is not closed. Then the set $\text{Min}_\Lambda(S)$ of

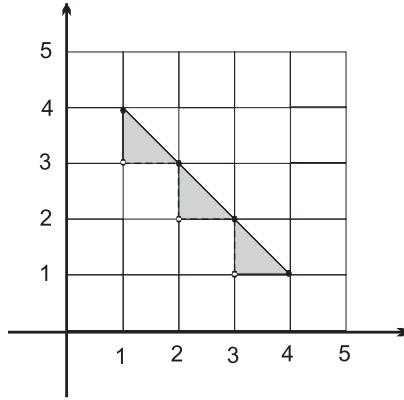


Fig. 1. The set S in Example 1

all minimal elements of S is given as

$$\text{Min}_\Lambda(S) = \{(2; 3), (3; 2)\},$$

whereas the (Λ, τ) -infimum of the S reads as

$$\text{Inf}^{\Lambda, \tau}(S) = \{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\},$$

where τ is the strong topology of $\mathbb{R}^2$. Consequently, in contrast to the scalar case where the inclusion $\text{Min}_\Lambda(S) \subseteq \text{Inf}^{\Lambda, \tau} S$ is always true, we have:

$$\text{Inf}^{\Lambda, \tau}(S) \neq \emptyset, \quad \text{Min}_\Lambda(S) \neq \emptyset, \quad \text{and} \quad \text{Inf}^{\Lambda, \tau}(S) \cap \text{Min}_\Lambda(S) = \emptyset.$$

Let X_∂ be a non-empty subset of the Banach space X , and $f : X_\partial \rightarrow Y$ be some mapping. Note that the mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ can be associated with its natural extension $\widehat{f} : X \rightarrow Y^\bullet$ to the whole space X , where

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_\partial, \\ +\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases}$$

Following [1] a mapping $f : X_\partial \rightarrow Y^\bullet$ is said to be bounded below if there exists an element $z \in Y$ such that $z \leq_\Lambda f(x)$ for all $x \in X_\partial$.

Definition 4. A subset A of Y is said to be the efficient infimum of a mapping

$$f : X_\partial \rightarrow Y$$

with respect to the τ -topology of Y and is denoted by $\text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$, if A is the (Λ, τ) -infimum of the image $f(X_\partial)$ of X_∂ in Y , that is,

$$\text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) = \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \{f(x) : \forall x \in X_\partial\}.$$

Remark 1. It is clear now that if $a \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$ then

$$\text{cl}_\tau \{f(x) : \forall x \in X_\partial\} \cap (a - \Lambda) = \{a\}$$

provided $\text{Min}_\Lambda [\text{cl}_\tau \{f(x) : \forall x \in X_\partial\}] \neq \emptyset$.

Let $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence in Y . Let $L^\tau\{y_k\}$ denote the set of all its cluster points with respect to the τ -topology of Y , that is, $y \in L^\tau\{y_k\}$ if there is a subsequence $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ such that $y_{k_i} \xrightarrow{\tau} y$ in Y as $i \rightarrow \infty$. If this set is lower unbounded, i.e., $\text{Inf}^{\Lambda, \tau} L^\tau\{y_k\} = -\infty_\Lambda$, we assume that $\{-\infty_\Lambda\} \in L^\tau\{y_k\}$. If $\text{Sup}^{\Lambda, \tau} L^\tau\{y_k\} = +\infty_\Lambda$, we assume that $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\tau\{y_k\}$. Let $x_0 \in X_\partial$ be a fixed element. In what follows for an arbitrary mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ we make use of the following sets:

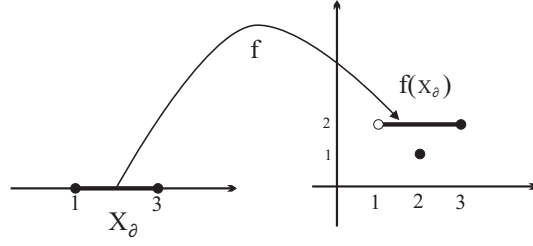
$$L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\tau\{\widehat{f}(x_k)\}, \quad (2.1)$$

$$L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) := L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \cap \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x), \quad (2.2)$$

where $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ is the set of all sequences $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ such that $x_k \rightarrow x_0$ with respect to the σ -topology of X . To illustrate the characteristic features of the set $L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0)$, we give the following example.

Example 2. Let $X_\partial = [1; 3]$, $Y = \mathbb{R}^2$, and let $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ be the ordering cone of positive elements. We define a vector-valued mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ as follows:

$$f(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix}, & x \neq 1, \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & x = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Fig. 2. Illustration of the set $L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0)$

(see Fig. 2). Then

$$L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) = \{f(x_0)\} \quad \forall x_0 \in (1; 3],$$

$$L^{\sigma \times \tau}(f, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ and } \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} f(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Therefore, $L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) = \emptyset$ in the case when $x_0 \in (1; 3]$, and

$$L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Remark 2. It is easy to see that the set $L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0)$ can be alternatively defined as

$$L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) = \left\{ y^* \in L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \text{ if } f(x_k) \xrightarrow{\tau} y^*, \right. \\ \left. f(x_k) \leq_{\Lambda} y^* \forall k \in \mathbb{N}, \forall x_k \xrightarrow{\sigma} x_0 \right\}. \quad (2.4)$$

Now we are able to introduce the notion of the lower limit for the vector-valued mappings.

Definition 5. We say that a subset $A \subset Y \cup \{\pm\infty_{\Lambda}\}$ is the Λ -lower sequential limit of the mapping $f : X_\delta \rightarrow Y$ at the point $x_0 \in X_\delta$ with respect to the product topology $\sigma \times \tau$ of $X \times Y$, and we use the notation $A = \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \tau} f(x)$, if

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \tau} f(x) := \begin{cases} L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0), & L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \neq \emptyset, \\ \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} L^{\sigma \times \tau}(f, x_0), & L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.5)$$

Remark 3. Note that in the scalar case ($f : X_\delta \rightarrow \mathbb{R}$) the sets

$$\inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} f(x) \quad \text{and} \quad \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} L^{\sigma \times \tau}(f, x_0)$$

are singletons. Therefore, if $L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \neq \emptyset$ then we have

$$\begin{aligned} L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) &= L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \cap \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} f(x) \\ &= \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \cap \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} f(x) \\ &= \inf_{x \in X_\delta}^{\Lambda, \tau} L^{\sigma \times \tau}(f, x_0). \end{aligned}$$

Hence the choice rules in (2.5) coincide and we come to the classical definition of the lower limit.

To illustrate the crucial role of the conditions

$$L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \neq \emptyset \quad \text{and} \quad L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) = \emptyset$$

in Definition (5), we give the following example.

Example 3. Under assumptions of Example 2 we consider the mapping $f : X_{\partial} \rightarrow Y$ defined as follows (see Fig. 3):

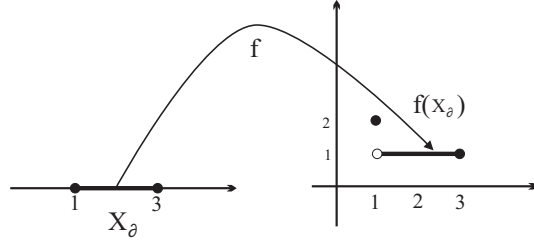


Fig. 3. Illustration of Definition 5 in Example 3

$$f(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, & x \neq 1, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & x = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Let us define the Λ -lower sequential limit of $f : X_{\partial} \rightarrow Y$ at two points: firstly at $x_0 = 1$, and after at $x_0 \neq 1$. Then direct calculations show that

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{x \in X_{\partial}}^{\Lambda, \tau} f(x) &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad L^{\sigma \times \tau}(f, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{and} \\ L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \forall x_0 \in (1; 3]. \end{aligned}$$

Hence, since

$$L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x_0) := \text{Inf}_{x \in X_{\partial}}^{\Lambda, \tau} f(x) \cap L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) = \emptyset \quad \text{for every } x_0 \in (1; 3],$$

it follows that

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \tau} f(x) = \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

At the same time, in the case when $x_0 = 1$, we have

$$L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, 1) := \text{Inf}_{x \in X_{\partial}}^{\Lambda, \tau} f(x) \cap L^{\sigma \times \tau}(f, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

As a result, we conclude:

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} 1}^{\Lambda, \tau} f(x) = L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. The setting of vector optimization problems

Let X_∂ be a non-empty σ -closed subset of the reflexive Banach space X . Let Y be a partially ordered Banach space with a τ -closed pointed ordering cone $\Lambda \subset Y$. Let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be a given mapping. Then the typical vector optimization problem can be stated in general manner as follows:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize } f(x) \text{ with respect to the cone } \Lambda \\ \text{subject to } x \in X_\partial. \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Usually this problem is associated with the triplet $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, where the set X_∂ is called the set of admissible solutions to the problem (3.1). The problem consists in determining minimal (or weakly minimal) solutions $x^{min} \in X_\partial$ which are defined as the inverse image of the minimal (or weakly minimal) elements of the image set $f(X_\partial)$ in the sense of Definition 1 (or Definition 2, respectively). Let $\text{Min}(X_\partial, f, \Lambda)$ and $\text{WMin}(X_\partial, f, \Lambda)$ denote the sets of minimal and weakly minimal solutions to the problem (3.1), respectively. It is clear that the notions “minimal” and “weakly minimal” are closely related, moreover, the following inclusion is obvious

$$\text{Min}(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq \text{WMin}(X_\partial, f, \Lambda).$$

However, the concept of weak minimality is rather of theoretical interest, and it is not an appropriate notion for applied problems.

In contrast to (3.1) we will consider the vector optimization problems in the following form:

$$\text{Realize } \inf_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x), \quad (3.2)$$

where the operator $\inf_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau}$ is defined in Definition 4. Note that in this case the optimization problem (3.2) can be associated with the quaternary

$$\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle, \quad (3.3)$$

which indicates that the essential component of this setting is the choice of the τ -topology on the objective space Y .

Remark 4. It is clear that vector optimizations problems (3.1) and (3.2) are identical in the case when $Y = \mathbb{R}$ and $\Lambda = \mathbb{R}_+$, and they lead to the classical setting of a scalar constrained minimization problem. However, in general, there is a principal difference between the mentioned setting of vector optimizations problems. First, as follows from (3.2), it is natural to say that an element $x^* \in X_\partial$ is a solution to the problem (3.2) if

$$f(x^*) \in \inf_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x). \quad (3.4)$$

Hence, $f(x^*) \in \text{Min}_\Lambda(\text{cl}_\tau f(X_\partial))$. Since $f(x^*) \in f(X_\partial)$ it follows that

$$f(x^*) \in \text{Min}_\Lambda f(X_\partial).$$

Therefore, x^* is a minimal solution to the problem (3.1), i.e. $x^* \in \text{Min}(X_\partial, f, \Lambda)$. However, as follows from Example 4 given below, the converse statement is not

true in general. Note that this situation is atypical for the scalar case when we always have the implication

$$\text{if } f(x^*) = \min_{x \in X_\partial} f(x), \text{ then } x^* \in X_\partial \text{ and } f(x^*) = \inf_{x \in X_\partial} f(x).$$

On the other hand, as follows from Definition 4, the problem (3.2), and hence the set of its solutions, essentially depend on the properties of the τ -topology of the objective space Y . Thereby, the problems (3.1) and (3.2) are essentially different.

We introduce now the following concept.

Definition 6. An element $x^{eff} \in X_\partial$ is said to be a (Λ, τ) -efficient solution to the problem (3.2) if x^{eff} realizes the (Λ, τ) -infimum of the mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$, that is,

$$f(x^{eff}) \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) = \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \{f(x) : \forall x \in X_\partial\}.$$

We denote by $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ the set of all (Λ, τ) -efficient solutions to the vectorial problem (3.2), i.e.

$$\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) = \left\{ x^{eff} \in X_\partial : f(x^{eff}) \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) \right\}. \quad (3.5)$$

Taking into account the motivation of Remark 4, we come to the following obvious result:

Proposition 1. Let X and Y be two Banach spaces, let X_∂ be a non-empty subset of X , and let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be an objective mapping. Assume that the space Y is partially ordered by a τ -closed pointed cone $\Lambda \subset Y$. Then the solution sets to the problems (3.1) and (3.2) satisfy the relation

$$\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \subseteq \text{Min}(X_\partial, f, \Lambda).$$

The sets $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ and $\text{Min}(X_\partial, f, \Lambda)$ do not coincide in general. To illustrate this fact, we give the following example.

Example 4. (see [12]) Let $X = Y = \mathbb{R}^2$ and let $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ be the ordering cone of positive elements. We suppose that a vector-valued mapping $f : X \rightarrow Y$ and a set of admissible solutions X_∂ are such that $f(x) = x$ and $X_\partial = \cup_{i=1}^4 X_i$, where

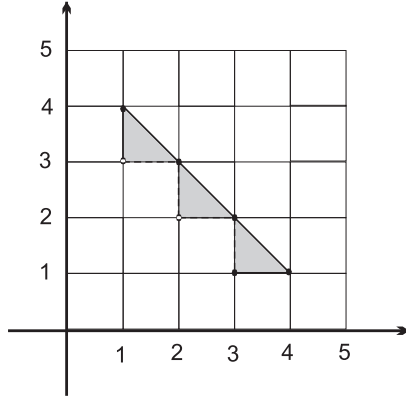
$$\begin{aligned} X_1 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 \geq 1, z_2 > 3, z_1 + z_2 \leq 5\}, \\ X_2 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 > 2, z_2 > 2, z_1 + z_2 \leq 5\}, \\ X_3 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 > 3, z_2 \geq 4, z_1 + z_2 \leq 5\}, \\ X_4 &= \{(2; 3), (3; 2), (3; 1)\} \end{aligned}$$

(see Fig. 4). Then straightforward calculations show that

$$\text{Min}_\Lambda(f(X_\partial)) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Inf}^{\Lambda, \tau}(f(X_\partial)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hence

$$\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Min}(X_\partial, f, \Lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fig. 4. The image of the set X_∂ in Example 4

The aim of this section is to obtain an existence theorem of the (Λ, τ) -efficient solutions for a vector optimization problem (3.2), that is, to find sufficient conditions which guarantee the relation $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \neq \emptyset$. Let $\hat{f} : X \rightarrow Y^\bullet$ denote the natural extension of $f : X_\partial \rightarrow Y$ to the whole X . We begin with the following concept of lower semicontinuity for vector-valued mappings.

Definition 7. We say that a mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous $((\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc) at the point $x_0 \in X_\partial$ if

$$f(x_0) \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \tau} \hat{f}(x).$$

A mapping f is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc if f is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc at each point of X_∂ .

The main motivation to introduce this concept is the following observation.

Proposition 2. Let X be a Banach space, and let Y be a partially ordered Banach space with an ordering τ -closed pointed cone Λ . Moreover, let X_∂ be a non-empty subset of X and let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be a given mapping. If $x^0 \in X_\partial$ is any (Λ, τ) -efficient solution to the problem (3.2), then the mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc at this point for any Hausdorff topology σ on X .

Proof. Let $x^0 \in \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$. Then $f(x^0) \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$. On the other hand

$$f(x^0) \in L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x^0)$$

for any Hausdorff topology σ on X . Hence

$$f(x^0) \in L_{\min}^{\sigma \times \tau}(f, x^0).$$

As a result, by Definition 5, we have

$$f(x^0) \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x^0}^{\Lambda, \tau} f(x).$$

This concludes the proof. $\square$

Before proceeding further, we note that the concept of $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuity for the vector-valued mappings, given above, is more general than well known extensions of the “scalar” notion of lower semicontinuity to the vector-valued case (see, for example, [3, 4, 5, 7, 8, 13, 16]). We recall now a few main definitions of lower semicontinuity of vector-valued mappings with respect to the product topology $\sigma \times \tau$ on $X \times Y$, introduced in [7, 8, 10, 19].

Definition 8. (see [8]) A mapping $f : X \rightarrow Y^\bullet$ is said to be sequentially lower semicontinuous (s-lsc) at $x^0 \in X$, if for any $y \in Y$ satisfying $y \leq_\Lambda f(x^0)$ and for any sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ of X σ -convergent to x^0 , there exists a sequence $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset Y$ τ -converging to y in Y and satisfying condition $y_k \leq_\Lambda f(x_k)$, for any $k \in \mathbb{N}$.

Definition 9. (see [7]) A mapping $f : X \rightarrow Y^\bullet$ is said to be quasi lower semicontinuous (q -lsc) at $x^0 \in X$, if for each $b \in Y$ such that $b \not\leq_\Lambda f(x^0)$, there exists a neighborhood $\mathcal{O}$ of x^0 in the σ -topology of X such that $b \not\leq_\Lambda f(x)$ for each x in $\mathcal{O}$.

A mapping f is s-lsc (resp., q -lsc) if f is s-lsc (resp., q -lsc) at each point of X . It is clear that the s-lsc-property of f at x implies its q -lsc at this point. To characterize the properties of $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuity more precisely, we give the following result.

Proposition 3. (see [12]) If a mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ is q -lower semicontinuous at $x^0 \in X_\partial$ with respect to the $\sigma \times \tau$ -topology on $X \times Y$, then f is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous at this point.

As a consequence of this result and the properties of quasi-lower semicontinuity, we have: if f is s-lsc then f is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc. However, in general, $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc continuity of the vector-valued mappings does not imply their q -lsc property. Indeed, let us consider the following example.

Example 5. Let $X_{ad} = [-3, -1]$, $Y = \mathbb{R}^2$, and let $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ be the ordering cone of positive elements. We define a vector-valued mapping $f : X_{ad} \rightarrow Y$ as follows (see Fig. 5):

$$f(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -x \\ 2 \end{bmatrix}, & x \neq -1, \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & x = -1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Let $x_0 = -1$. Then

$$f(x_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \tau} \widehat{f}(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.7)$$

(see Fig. 5). Let us take $b = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Obviously $b \not\leq_\Lambda f(x_0)$ and there is no neighborhood of the point x_0 such that $b \not\leq_\Lambda f(x)$ for all x from this neighborhood. Hence, this mapping is neither q -lsc nor lsc mapping at the point x_0 . However, by (3.7), we have the inclusion

$$f(x_0) \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \tau} \widehat{f}(x).$$

Hence, f is the $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous mapping at $x_0 = -1$.

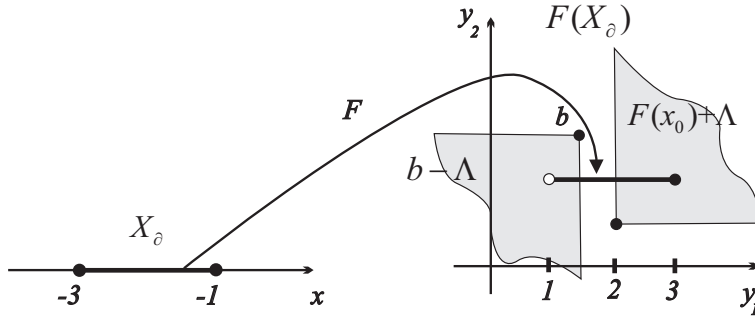


Fig. 5. The example of $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc mapping which is neither s-lsc nor q -lsc mapping

Before going on further, we prescribe some additional properties to the ordering cone Λ .

Definition 10. Let (Y, τ) be a real topological linear space with an ordering cone Λ . The convex cone Λ is called Daniell, if for every decreasing net (i.e. $i \leq j \implies y_j \leq_\Lambda y_i$), which is lower bounded, τ -converges to its (Λ, τ) -infimum.

Condition ensuring the Daniell property are given by the next lemma.

Lemma 1. Let (Y, τ) be a real topological linear space with an ordering cone Λ . If Y has compact intervals $[-z, z]$ and Λ is τ -closed and pointed, then Λ is Daniell.

For this result see Borwein [6]. A typical example of Daniell cone with respect to the weak topology of $L^p(\Omega)$ ($1 < p < +\infty$) is the so-called natural ordering cone in $L^p(\Omega)$ which is defined as

$$\Lambda_{L^p(\Omega)} = \{f \in L^p(\Omega) : f(x) \geq 0 \text{ almost everywhere on } \Omega\}.$$

Definition 11. We say that a non-empty subset Y_0 of a real topological space (Y, τ) with an ordering cone Λ is lower semibounded if every decreasing net $\{y_i\} \subset Y_0$ is bounded from below.

As a direct consequence of Definition 11, we have the following observation.

Remark 5. Let Y_0 be a lower semibounded subset of a partially ordered linear topological space Y with a τ -closed ordering cone Λ . Then, for any $z \in Y_0$ the section $Y_0^z = (\{z\} - \Lambda) \cap Y_0$ of Y_0 is bounded from below, that is, there exists an element $z^* \in Y$ such that $z^* \leq_\Lambda y$ for all $y \in Y_0^z$. Hence, the lower semiboundedness of a subset Y_0 implies the lower semiboundedness of its τ -closure $\text{cl}_\tau Y_0$.

Now we are ready to formulate the main result of this section.

Theorem 1. Let (X, σ) and (Y, τ) be two real topological linear spaces, and let Y be partially ordered with the τ -closed pointed Daniell cone Λ . Moreover, let X_∂ be a non-empty sequentially σ -compact subset of X and let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be a given $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous mapping. Then the vector optimization problem (3.2) has a non-empty set of (Λ, τ) -efficient solutions.

Remark 6. Before the proof, we note that in contrast to the scalar case for vector optimization problem (3.2) with a sequentially σ -compact subset of X_∂ and $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous objective mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$, the image set $f(X_\partial)$ can be unbounded from below. It means that, in general, there does not exist an element $y^* \in Y$ such that $f(X_\partial) \subset \{y^*\} + \Lambda$. Indeed, let us consider the following example: let $X = \mathbb{R}$, $X_\partial = [0; 1]$, $Y = \mathbb{R}^2$, and let $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ be the ordering cone of positive elements. We suppose that a vector-valued mapping $f : X \rightarrow Y$ is defined as follows:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -1/x \\ 1/x \end{bmatrix} \quad \text{if } x \in [0; 1), \text{ and } f(1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Since

$$L^{\sigma \times \tau}(f, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{and} \quad \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

it follows that

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} 1}^{\Lambda, \tau} \hat{f}(x) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hence this mapping is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous on X_∂ . However the image set $f(X_\partial)$ is unbounded from below (see Fig. 6).

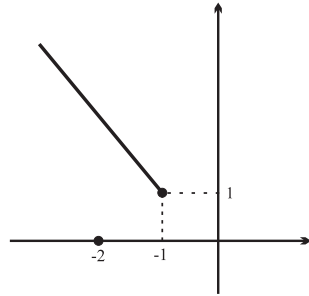


Fig. 6. The example of $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lsc mapping with lower unbounded image

Proof. Since the proof of this theorem is rather technical, we divide it into several steps.

Step 1. First we show that the image set $f(X_\partial)$ is lower semibounded in the sense of Definition 11. Indeed, let us assume the converse. Then, there exists a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ such that the corresponding image sequence

$$\{y_k = f(x_k)\}_{k=1}^\infty \subset f(X_\partial)$$

is decreasing (i.e., $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k \forall k \in \mathbb{N}$) and unbounded from below in Y . Hence $-\infty_\Lambda \in L^\tau \{y_k\}$, where $L^\tau \{y_k\}$ denotes the set of all its cluster points with respect to the τ -topology of Y . By the initial assumptions, the family $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ is sequentially σ -compact, so we may suppose that $x_k \xrightarrow{\sigma} x^*$ in X , where x^* is some

element of X_∂ . Since the sequence $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty$ is unbounded from below, we have $\{-\infty_\Lambda\} \in L_{min}^{\sigma \times \tau}(f, x^*)$. Hence, by Definition 5,

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x^*}^{\Lambda, \tau} f(x) = \{-\infty_\Lambda\}.$$

On the other hand, taking into account the $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuity property of f , we obtain

$$f(x^*) \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x^*}^{\Lambda, \tau} f(x)$$

which contradicts the previous conclusion. This proves Step 1.

Step 2. Let us prove that the set $\text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$ is non-empty. We show that there exists at least one decreasing sequence $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset f(X_\partial)$ such that

$$y_k \xrightarrow{\tau} y^* \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) = \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \{f(x) : \forall x \in X_\partial\}.$$

Let y be an arbitrary element of $\text{cl}_\tau f(X_\partial)$. To begin with, we show that for any neighbourhood of zero $\mathcal{V}_\tau$ in (Y, τ) there exists an element $y^\mathcal{V} \in \text{cl}_\tau f(X_\partial)$ such that

$$y^\mathcal{V} \leq_\Lambda y \quad \text{and} \quad (\{y^\mathcal{V}\} - \Lambda \setminus \{0_Y\}) \cap (\text{cl}_\tau f(X_\partial) \setminus (\mathcal{V}_\tau + \{y^\mathcal{V}\})) = \emptyset. \quad (3.8)$$

Having assumed the converse, we suppose the existence of a sequence

$$\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{cl}_\tau f(X_\partial)$$

such that

$$y_1 \in f(X_\partial), \quad y_{k+1} \in (\{y_k\} - \Lambda \setminus \{0_Y\}) \cap (\text{cl}_\tau f(X_\partial) \setminus (\mathcal{V}_\tau + \{y_k\})) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Since $y_{k+1} \in \{y_k\} - \Lambda \setminus \{0_Y\}$, this sequence is decreasing. Taking into account Remark 5, the set $\text{cl}_\tau f(X_\partial)$ is lower semibounded. Therefore, there exists an element $y^* \in Y$ such that $y^* \leq_\Lambda y_k$ for all $k \in \mathbb{N}$. Hence, by Daniell property, this sequence τ -converges to its (Λ, τ) -infimum: $y_k \xrightarrow{\tau} \tilde{y} \in Y$. However this contradicts the condition

$$y_{k+1} \in \text{cl}_\tau f(X_\partial) \setminus (\mathcal{V}_\tau + \{y_k\}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Thus the choice by the rule (3.8) is possible for any neighbourhood $\mathcal{V}_\tau$.

Let $\{\mathcal{V}_k\}_{k=1}^\infty$ be a neighbourhood system of zero in (Y, τ) such that $\mathcal{V}_{k+1} \subset \mathcal{V}_k$ for every $k \in \mathbb{N}$, and for any neighbourhood $\mathcal{V}(0_Y)$ in (Y, τ) there is an integer $k^* \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{V}_{k^*} \subseteq \mathcal{V}(0_Y)$. Then, using the choice rule (3.8), we can construct a sequence $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{cl}_\tau f(X_\partial)$, where u_1 is an arbitrary element of $f(X_\partial)$, as follows

$$u_{k+1} \leq_\Lambda u_k \quad \text{and} \quad (\{u_k\} - \Lambda \setminus \{0_Y\}) \cap (\text{cl}_\tau f(X_\partial) \setminus (\mathcal{V}_k + \{u_k\})) = \emptyset \quad \forall k \geq 1. \quad (3.9)$$

Since $u_{k+1} \in \{u_k\} - \Lambda$ it follows that

$$u_{k+1} \in \text{cl}_\tau f(X_\partial) \quad \text{and} \quad u_{k+1} \notin \text{cl}_\tau f(X_\partial) \setminus (\mathcal{V}_k + \{u_k\}).$$

Hence, in view of Daniell property, $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ is the τ -converging decreasing sequence. As a result, there is an element

$$u^* \in \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \{u_k \in \text{cl}_\tau f(X_\partial) : \forall k \in \mathbb{N}\}$$

such that $u_k \xrightarrow{\tau} u^*$. It is clear that $u^* \in \text{cl}_\tau f(X_\partial)$. Our aim is to prove that $u^* \in \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \{f(x) : \forall x \in X_\partial\}$. To do this, we assume that there exists an element

$$q \in \text{Inf}^{\Lambda, \tau} \{f(x) : \forall x \in X_\partial\}$$

such that $q \leq_\Lambda u^*$. Since $u^* \leq_\Lambda u_k$ for all $k \in \mathbb{N}$, it follows that $q \leq_\Lambda u_k$ for all $k \in \mathbb{N}$. Then (3.9) ensures that

$$(\{q\} - \Lambda \setminus \{0_Y\}) \cap (\text{cl}_\tau f(X_\partial) \setminus (\mathcal{V}_k + \{u_k\})) = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Hence (3.10) and the fact that $q \in \text{cl}_\tau f(X_\partial)$ imply $q \in \mathcal{V}_k + \{u_k\}$ for every $k \in \mathbb{N}$, that is, $u_k \xrightarrow{\tau} q$ in Y . Thus $u^* = q$ and this concludes the Step 2.

Step 3: We show that the set $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ is non-empty. Let ξ be any element of $\text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$. Then, by Definition 4, there exists a sequence $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset Y$ such that $y_k \xrightarrow{\tau} \xi$ in Y . We define a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ as follows $x_k = f^{-1}(y_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$. Since the set X_∂ is sequentially σ -compact, we may suppose that there exists $x_0 \in X_\partial$ such that $x_k \xrightarrow{\sigma} x_0$ in X . Hence $\xi \in L^{\sigma \times \tau}(f, x_0)$, and we get

$$L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \cap \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x) \neq \emptyset.$$

Then, due to the $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuity of the mapping f on X_∂ and Definition 5, we obtain

$$f(x_0) \in \liminf_{x \rightarrow x_0}^{\Lambda, \tau} f(x) = L^{\sigma \times \tau}(f, x_0) \cap \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x).$$

Thus, on the one hand,

$$f(x_0) \in L^{\sigma \times \tau}(f, x_0),$$

which implies the equality

$$f(x_0) = \xi = \tau\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

On the other hand, $\xi \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$. Hence, $x_0 \in \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ and this concludes the proof. $\square$

4. Vector optimization problems for $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous objective mappings and their scalarization

Typically, scalarization means the replacement of a vector optimization problem by a suitable scalar optimization problem that is an optimization problem with a real-valued objective functional. It is a fundamental principle in vector optimization that optimal (minimal) elements of a subset of a partially ordered linear space can be characterized as optimal solutions of certain scalar optimization problems. For the problem (3.1), a wide family of scalar problems is known,

which fully describe the set of all minimal elements $\text{Min}(X_\partial, f, \Lambda)$ under suitable assumptions (see, for instance, [9, 11, 14, 15] and the references therein). However, our prime interest is to describe the set $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ of (Λ, τ) -efficient solutions to the vector problem (3.2) (see (3.5)), which involves some topological properties of the objective mapping f and the space Y . In order to do it, we will consider the problem of scalar representation of vector optimization problem (3.2) with a $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$, using the “simplest” method of the “weighted sum”.

To begin with, we introduce some additional suppositions. As was mentioned above, the objective space Y is dual to some separable Banach space V (that is $Y = V^*$). Suppose that the space V is partially ordered with a nontrivial pointed ordering cone $K \subset V$ for which Λ is the dual cone, that is,

$$\Lambda = K^* := \left\{ y \in Y : \langle y, \lambda \rangle_{Y;V} \geq 0 \text{ for all } \lambda \in K \right\}. \quad (4.1)$$

Definition 12. We say that $\lambda \in V$ is a quasi-interior point of the cone K if $\lambda \in K$ and $\langle b, \lambda \rangle_{Y;V} > 0$ for all $b \in \Lambda \setminus \{0\}$.

We denote by $K^\sharp$ the set of all quasi-interior points of K . Note that, in general, we have the inclusion $\text{cor}(K) \subseteq K^\sharp$, where $\text{cor} K$ is an algebraical interior of the cone K (for more details we refer to [11]).

In what follows, we associate with the vector optimization problem (3.2) the following scalar minimization problem

$$f_\lambda(x) = \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \rightarrow \inf \quad \text{subject to } x \in X_\partial \subset X \quad (4.2)$$

where λ is an element of the cone K .

The main property of this problem can be characterized as follows.

Theorem 2. *Let X and $Y = V^*$ be two real Banach spaces, let Y be endowed with the weak-* topology τ , and let Y be partially ordered with the cone $\Lambda = K^*$, where K is an ordering cone in V with a non-empty quasi-interior $K^\sharp$. Let also X_∂ be a non-empty subset of X , and let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be a given mapping. Assume that there are elements $x^0 \in X_\partial$ and $\lambda \in K^\sharp$ such that $x^0 \in \underset{x \in X_\partial}{\text{Argmin}} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V}$.*

Then x^0 is a (Λ, τ) -efficient solution to the problem (3.2).

Proof. By the initial assumptions, we have

$$f_\lambda(x^0) - f_\lambda(x) = \langle f(x^0) - f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \leq 0, \quad \forall x \in X_\partial. \quad (4.3)$$

Let z be any element of the image set $\text{cl}_\tau f(X_\partial)$. Then there exists a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ such that $f(x_k) \xrightarrow{\tau} z$ in Y as $k \rightarrow \infty$. Hence, in view of (4.3), we get

$$\langle f(x^0) - f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Passing to the limit in (4.4) as $k \rightarrow \infty$, we obtain

$$\langle f(x^0) - z, \lambda \rangle_{Y;V} \leq 0, \quad \forall z \in \text{cl}_\tau f(X_\partial). \quad (4.5)$$

Let us assume that $x^0 \notin \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$. Then there exists an element $h \in \text{cl}_\tau f(X_\partial)$ such that $h <_\Lambda f(x^0)$. So, $f(x^0) - h \in \Lambda \setminus \{0_Y\}$. Hence, by Definition 12,

$$\langle f(x^0) - h, \lambda \rangle_{Y;V} > 0,$$

and we come to a contradiction with (4.5). So, $x^0 \in \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ and this concludes the proof. $\square$

As an evident consequence of this result, we have the following conclusion.

Corollary 1. *Under suppositions of Theorem 2, we have*

$$\bigcup_{\lambda \in K^\#} \text{Argmin}_{x \in X_\partial} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \subseteq \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda). \quad (4.6)$$

Remark 7. Note that Theorem 2 generally fails when $\lambda \in K \setminus K^\#$. Indeed, let $V = Y = \mathbb{R}^2$, $X_\partial = [1, 2]$, and let $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ be the ordering cone of positive elements (then $K = \Lambda$). We define the objective mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ as follows:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{if } x \in (1, 2], \quad \text{and} \quad f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{at the point } x = 1$$

(see Fig. 7). Straightforward calculations show that

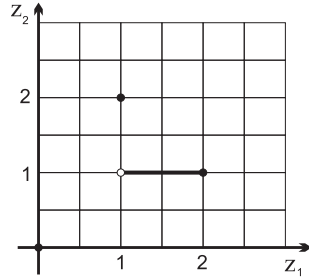


Fig. 7. The example of the problem for which $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) = \emptyset$

$$\liminf_{x \rightarrow 1}^{\Lambda, \tau} f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

and hence $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) = \emptyset$. However, if we take $\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in K \setminus K^\#$, then

$$\langle f(x), \lambda \rangle_{V^*, V} = x$$

and hence

$$\text{Argmin}_{x \in [1, 2]} \langle f(x), \lambda \rangle_{V^*, V} = \{1\} \notin \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda).$$

Before proceeding further, we note that the objective mapping in Theorem 2 does not possess the $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuity property, in general. So the question is about the solvability of the associated scalar minimization problems (4.2) with $\lambda \in K^\#$. Following the direct method in the Calculus of Variations, the

Straightforward calculations show that

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} 1}^{\Lambda, \tau} f(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} (1+1/k)}^{\Lambda, \tau} f(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1+k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+1/k \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Since

$$f(1) \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} 1}^{\Lambda, \tau} f(x) \quad \text{and} \quad f(1+1/k) \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} (1+1/k)}^{\Lambda, \tau} f(x),$$

it means that the mapping $f : X_{\partial} \rightarrow \mathbb{R}^2$ is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous at these points and in fact on the whole domain X_{∂} . Let $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ be any vector with non-negative components, i.e. $\lambda \in K$. Then the scalar function f_{λ} , associated with the vector-valued mapping f by the scheme of the “weighted sum”, can be represented in the form

$$f_{\lambda}(x) := \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} = \begin{cases} \lambda_1 x + \lambda_2, & \text{if } x \neq 1 + 1/k, \\ \lambda_2(1 + k), & \text{if } x = 1 + 1/k, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X_{\partial}. \quad (4.8)$$

To be sure that the lower σ -semicontinuity property for this function at the points $x_k = 1 + 1/k$ is valid, we have to choose the parameters λ_1 and λ_2 so that the inequality

$$\lambda_2(1 + k) \leq \lambda_1(1 + 1/k) + \lambda_2 \quad (4.9)$$

holds true for every $k \in \mathbb{N}$.

However, taking into account the non-negativeness of λ_i and passing in (4.9) to the limit as $k \rightarrow \infty$, we obtain $\lambda_2 = 0$. As a result, we have

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda_1 x, & \text{if } x \neq 1 + 1/k, \\ 0, & \text{if } x = 1 + 1/k, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X_{\partial}. \quad (4.10)$$

Nevertheless, as follows from (4.10), the inequality

$$f_{\lambda}(1) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_{\lambda}(x_k)$$

does not hold for any $\lambda_1 > 0$ with the exception of $\lambda_1 = 0$. Thus, there is a unique scalar function in the collection (4.8) satisfying the lower semicontinuity property in the domain $X_{\partial} = [1, 2]$. This function is $f_{\lambda}(x) \equiv 0$.

This example motivates the introduction of the following notion.

Definition 13. Let $f : X_{\partial} \rightarrow Y$ be a given mapping. The cone

$$K_f^{\sigma} := \{\lambda \in K : f_{\lambda} \text{ is lower } \sigma\text{-semicontinuous on } X_{\partial}\} \quad (4.11)$$

is called the cone of σ -semicontinuity for the mapping f .

As a result, Theorem 2 can be sharpened as follows.

Theorem 3. *Let X be a reflexive Banach space, let V be a separable Banach space, and let $Y = V^*$ be endowed with the weak-* topology τ and partially ordered with a pointed Daniell cone $\Lambda = K^*$, where K is a weakly closed ordering cone in V . Let also X_∂ be a non-empty bounded weakly closed subset of X , and let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be a $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous mapping, where σ is the weak topology of X . Assume that $K_f^\sigma \setminus 0_V \neq \emptyset$. Then*

$$\operatorname{Argmin}_{x \in X_\partial} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \cap \operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in K_f^\sigma \setminus 0_V. \quad (4.12)$$

Proof. As follows from Theorem 1, under the above assumptions, we have

$$\operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \neq \emptyset.$$

Let λ be any element of $K_f^\sigma \setminus 0_V$. Then, by the direct method in the Calculus of Variations, we obtain

$$\operatorname{Argmin}_{x \in X_\partial} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \neq \emptyset.$$

If $\lambda \in K^\sharp$ then relation (4.12) is obvious by Theorem 2. So, we suppose that $\lambda \in K_f^\sigma \setminus (K^\sharp \cup 0_V)$. Assume that

$$\operatorname{Argmin}_{x \in X_\partial} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \not\subseteq \operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda).$$

Then, there exists an element $x^* \in X_\partial$ such that

$$x^* \in \operatorname{Argmin}_{x \in X_\partial} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V}, \quad (4.13)$$

$$x^* \notin \operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda). \quad (4.14)$$

Hence, by (4.14), there exists an element

$$y^* \in \operatorname{Min}_\Lambda(\operatorname{cl}_\tau f(X_\partial)) \subseteq \operatorname{cl}_\tau f(X_\partial) \text{ such that } y^* <_\Lambda f(x^*).$$

However, in view of (4.13) and (4.1), this leads us to the equality

$$f_\lambda(x^*) = \langle f(x^*), \lambda \rangle_{Y;V} = \langle y^*, \lambda \rangle_{Y;V}. \quad (4.15)$$

Let $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence in X_∂ such that

$$f(x_k) \xrightarrow{\tau} y^* \text{ as } k \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Since the set X_∂ is sequentially weakly compact, we may suppose that there exists $x_0 \in X_\partial$ such that $x_k \xrightarrow{\sigma} x_0$ in X . On the other hand, $y^* \in \operatorname{Min}_\Lambda(\operatorname{cl}_\tau f(X_\partial))$. Hence, $y^* \in \operatorname{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$ by Definition 6. As a result, we have $x_0 \in \operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$. Taking into account the lower σ -semicontinuity of the functional $f_\lambda : X_\partial \rightarrow \mathbb{R}$, we get

$$\langle f(x_0), \lambda \rangle_{Y;V} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} \stackrel{\text{by (4.16)}}{=} \langle y^*, \lambda \rangle_{Y;V}.$$

Then, combining this with (4.15), we obtain

$$\langle f(x_0), \lambda \rangle_{Y;V} \leq \langle f(x^*), \lambda \rangle_{Y;V},$$

i. e.

$$x_0 \in \underset{x \in X_\partial}{\operatorname{Argmin}} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V}.$$

Thus, we have shown that there exists at least one element $x_0 \in X_\partial$ which is a joint point of the sets $\underset{x \in X_\partial}{\operatorname{Argmin}} \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V}$ and $\operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$, respectively. This completes the proof. $\square$

As an evident consequence of this theorem, we have the following conclusion:

Corollary 2. *Assume that in addition to the conditions of Theorem 3 there exists an element $\lambda \in K_f^\sigma \setminus 0_V$ such that the infimum in the scalar problem*

$$\text{Minimize } f_\lambda(x) = \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \text{ subject to } x \in X_\partial \quad (4.17)$$

is attained at a unique point $x^ \in X_\partial$. Then $x^* \in \operatorname{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$.*

Note that, we do not give the conditions which would guarantee the fulfilment of the relation $K_f^\sigma \setminus 0_V \neq \emptyset$. However, as a hypothesis, we can make the following conjecture:

If the image set $f(X_\partial)$ is bounded in $\langle Y, \|\cdot\| \rangle$ and K has a non-empty quasi-interior ($K^\# \neq \emptyset$), then under conditions of Theorem 3, the cone K_f^σ contains at least one nontrivial element.

To motivate this hypothesis, we note that if a uniformly bounded mapping $f : X_\partial \rightarrow Y$ is quasi-lower semicontinuous on X_∂ then f is lower semicontinuous (see [2]). In this case the functions $f_\lambda(x) = \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V}$ are lower σ -semicontinuous on X_∂ for every $\lambda \in K$. Hence $K_f^\sigma \setminus 0_V \neq \emptyset$. Let x^0 be a point of X_∂ where the quasi-lower semicontinuity of f fails. Then there exists at least one element $a^* \in \operatorname{cl}_\tau(f(X_\partial))$ with properties (4.7). Let λ^* be an element of K such that

$$\langle f(x^0), \lambda^* \rangle_{Y;V} \leq \langle a^*, \lambda^* \rangle_{Y;V} \quad \forall a^* \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x^0}^{\Lambda, \tau} f(x). \quad (4.18)$$

The existence of λ^* immediately follows from the fact that

$$f(x^0) \not\preceq_\Lambda a^* \text{ for all } a^* \in \liminf_{x \xrightarrow{\sigma} x^0}^{\Lambda, \tau} f(x).$$

Let $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ be a sequence such that $x_k \xrightarrow{\sigma} x^0$ in X . Since each of elements a^* belongs to the set

$$L^{\sigma \times \tau}(f, x^0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathfrak{M}_\sigma(x^0)} L^\tau\{\widehat{f}(x_k)\}$$

of τ -cluster points of the sequences $\{\widehat{f}(x_k)\}_{k=1}^\infty$, it follows from (4.18) that

$$\langle f(x^0), \lambda^* \rangle_{Y;V} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle f(x_k), \lambda^* \rangle_{Y;V}.$$

Thus, the function f_{λ^*} is sequentially lower σ -semicontinuous at the point x^0 .

5. The ill-posed vector optimization problems and their generalized solutions

Let λ be an arbitrary element of the cone K . Denote by

$$\text{Sol}(X_\partial; f_\lambda) := \underset{x \in X_\partial}{\text{Argmin}} f_\lambda(x)$$

the solution set to the scalar problem (4.17). We recall that the problem (4.17) is said to be well-posed in the generalized sense when every minimizing sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ (i.e. such that $f_\lambda(x_k) \rightarrow \inf_{x \in X_\partial} f_\lambda(x)$) has a subsequence σ -converging to some element of $\text{Sol}(X_\partial; f_\lambda)$. We recall also a generalization of the above mentioned notion. The problem (4.17) is said to be well-set when every minimizing sequence contained in $X_\partial \setminus \text{Sol}(X_\partial; f_\lambda)$ has a σ -cluster point in $\text{Sol}(X_\partial; f_\lambda)$. However, as follows from the arguments of this section (see also Example 7 given below), the problem (4.17) can be neither well-posed nor well-set, in general. The main reason is the $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuity property of the objective mapping f which is the weakened property of lower semicontinuity for vector-valued mappings in Banach spaces.

Example 7. Let $X_\partial = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ be a unit closed ball in a reflexive Banach space X . Let $Y = \mathbb{R}^2$ be the objective space partially ordered with the cone $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ of positive elements in $\mathbb{R}^2$. We suppose that X and Y are endowed with the strong topologies σ and τ , respectively. Let the objective mapping $f : X_{ad} \rightarrow \mathbb{R}^2$ be defined as

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2 - \|x\| \\ 1 + \|x\| \end{bmatrix} \text{ if } x \in X_{ad} \setminus \{0_X \cup S\},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ if } x \in S, \quad f(0_X) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

where $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ is the unit sphere in X . Since

$$\text{Min}_\Lambda(\text{cl}_\tau f(X_\partial)) = \text{Min}_\Lambda(f(X_\partial)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

it follows that

$$\liminf_{x \xrightarrow{\sigma} 0_X}^{\Lambda, \tau} f(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

and hence f is $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous on X_∂ . Then, by Theorem 1, the corresponding vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ is solvable and, moreover, $x^{eff} = 0_X$ is its unique (Λ, τ) -efficient solution.

Let us consider the following scalar problem

$$\text{Minimize } f_\lambda(x) = (f(x), \lambda)_{\mathbb{R}^2} \text{ subject to } x \in X_\partial, \quad (5.1)$$

associated with the vector problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$, where

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_\lambda(x) := (f(x), \lambda)_{\mathbb{R}^2} = \begin{cases} 2 - \|x\|, & \text{if } \|x\| < 1 \text{ and } x \neq 0_X, \\ 2, & \text{if } x \in S, \\ 1, & \text{if } x = 0_X \end{cases}$$

Through direct verification we can show that $\text{Sol}(X_\partial; f_\lambda) = \{0_X\}$. However, this scalar problem is neither well-posed nor well-set with respect to the strong topology of X , because all minimizing sequences for (5.1) contained in $X_\partial \setminus \text{Sol}(X_\partial; f_\lambda)$ have σ -cluster points on the unit sphere $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

In many applications it has a sense to weaken the requirement on efficient solutions to the vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$. In particular, we may let the objective mapping to attain its efficient infimum on the set X_∂ with some error. On the other hand, the set of (Λ, τ) -efficient solutions to such problem can possibly be empty, i.e., the efficient infimum of the objective mapping is often unattainable on the given set X_∂ . Nevertheless, the absence of its infimum does not mean that the vector optimization problem makes no sense, since its efficient infimum exists and hence can be approached with some accuracy.

Definition 14. We say that a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ is minimizing to the vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$, if $f(x_k) \xrightarrow{\tau} \xi$ in Y , where ξ is an element of $\text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$.

Definition 15. We say that the vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ is well-posed in the Tikhonov sense with respect to the σ -topology of X , if it is solvable and every minimizing sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ has a subsequence σ -converging to some element of $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$. In this case a minimizing sequence is called a Tikhonov minimizing sequence. We also say that the vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ is well-set in the Tikhonov sense with respect to the σ -topology of X , if it is solvable and every minimizing sequence contained in $X_\partial \setminus \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ has a σ -cluster point in $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$.

Note that having a Tikhonov minimizing sequence, we can guarantee both the proximity of the corresponding values of the objective mapping to its efficient infimum and the proximity of the approximation itself to one of the (Λ, τ) -efficient solutions of the problem. Nevertheless it should be stressed that even in simple applied problems the construction of Tikhonov minimizing sequences and corresponding Tikhonov approximate solutions usually turns out to be a very complicated and sometimes unsolvable problem. In view of this, it is reasonable to weaken the requirements on approximate solutions to the vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$.

Definition 16. We say that an element $x^* \in X_\partial$ is the (σ, τ) -generalized solution to vector optimization problem (3.2), if there exist a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ and an element $\xi \in \text{Inf}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \tau} f(x)$ such that $x_k \xrightarrow{\sigma} x^*$ in X and $f(x_k) \xrightarrow{\tau} \xi$ in Y .

Thus, a vector optimization problem may have an approximate solution even in the absence of its solvability. It is clear that any Tikhonov approximate solution to the problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ is also a (σ, τ) -generalized solution. However, even if a (Λ, τ) -efficient solution is available ($x^{eff} \in \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$), we cannot guarantee the proximity of an (σ, τ) -generalized solution x^* to $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$ in the σ -topology of X .

We denote by $\text{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_\partial; f; \Lambda)$ the set of all (σ, τ) -generalized solutions to the problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$. It is clear that

$$\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \subseteq \text{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_\partial; f; \Lambda).$$

Moreover, as evident consequence of Theorem 1, we have the following obvious result:

Proposition 4. Under suppositions of Theorem 1, the vector optimization problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ is well-set in the Tikhonov sense with respect to the topology of X , and in addition $\text{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_\partial; f; \Lambda) = \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$.

However, as the next example indicates, the inverse inclusion

$$\text{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_\partial; f; \Lambda) \subset \text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda)$$

does not generally hold.

Example 8. Let $X_\partial = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq 1\}$ be a unit ball in a Banach space X , let $Y = \mathbb{R}^2$ be partially ordered with the cone $\Lambda = \mathbb{R}_+^2$ of positive elements in $\mathbb{R}^2$. Let the mapping $f : X_\partial \rightarrow \mathbb{R}^2$ be defined by

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 + \|x\| \\ 1 + \|x\| \end{bmatrix} \text{ if } x \in X_\partial \setminus \{0_X \cup S\},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ if } x \in S, \quad f(0_X) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

where $S = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| = 1\}$ is the unite sphere in X . We endow the spaces X

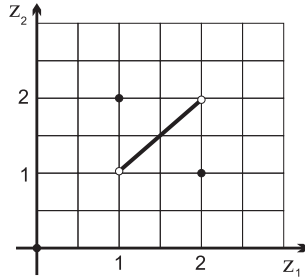


Fig. 9. The set $f(X_\partial)$ to Example 8

and Y with the weak (σ) and the strong (τ) topologies, respectively. Since

$$\text{Min}_\Lambda(f(X_\partial)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{and} \quad \text{Min}_\Lambda(\text{cl}_\tau f(X_\partial)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

it follows that $\text{Min}(X_\partial, f, \Lambda) = \{0_X\} \cup S$ whereas $\text{Eff}_\tau(X_\partial; f; \Lambda) = \emptyset$. However, the set of (σ, τ) -generalized solutions to the problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ is non-empty. Indeed, let us fix a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ such that

$$x_k \rightharpoonup 0_X \text{ in } X \text{ and } f(x_k) \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Then, following Definition 16, we have

$$0_X \in \text{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_\partial; f; \Lambda)$$

and, in fact,

$$\text{GenEff}_{\sigma,\tau}(X_\partial; f; \Lambda) = \{0_X\}.$$

Having taken $\lambda^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, we consider the following scalar problem associated with the vector problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$:

$$f_\lambda(x) := (f(x), \lambda)_{\mathbb{R}^2} = \begin{cases} 1 + \|x\|, & \text{if } \|x\| < 1 \text{ and } x \neq 0_X, \\ 1, & \text{if } \|x\| = 1, \\ 2, & \text{if } x = 0_X \end{cases} \quad (5.2)$$

Straightforward calculations show that

$$\text{Argmin}_{x \in X_\partial} f_\lambda(x) = \{x \in X_\partial : \|x\| = 1\}.$$

As a result, we have

$$\text{GenEff}_{\sigma,\tau}(X_\partial; f; \Lambda) \cap \text{Argmin}_{x \in X_\partial} f_\lambda(x) = \emptyset.$$

Thus, any solution of the scalar problem (5.2) is neither a (Λ, τ) -efficient solution nor a generalized one to the vector problem $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$. Thus, in view of Definition 15, $\langle X_\partial, f, \Lambda, \tau \rangle$ can be characterized as the ill-posed vector optimization problem.

To obtain the sufficient conditions which would guarantee that the set of (σ, τ) -generalized solutions to the problem $\langle \Xi, I, \Lambda, \tau \rangle$ is non-empty, we use the scalarization of this problem in the form (4.2).

Let $\text{sc}_\sigma^- f_\lambda : X_\partial \rightarrow \mathbb{R}$ denote the lower σ -semicontinuous envelope of the functional $f_\lambda(x) = \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V}$ with some $\lambda \in K$, that is, $\text{sc}_\sigma^- f_\lambda$ is the greatest lower σ -semicontinuous functional majorized by f_λ on X_∂ . Then, following the direct method in the Calculus of Variations, we get:

Proposition 5. Let X_∂ be a sequentially closed subset of a linear topological space (X, σ) . Assume that for a fixed $\lambda \in K$ the functional $\text{sc}_\sigma^- f_\lambda : X_\partial \rightarrow \mathbb{R}$ is countably σ -coercive, i.e. the σ -closure of the set $\{x \in X_\partial : \text{sc}_\sigma^- f_\lambda(x) \leq t\}$ is countably σ -compact for every $t \in \mathbb{R}$. Then every minimizing sequence for $\inf_{x \in X_\partial} \text{sc}_\sigma^- f_\lambda(x)$ has a σ -cluster point which is a minimum point of $\text{sc}_\sigma^- f_\lambda$ on X_∂ , i.e., $\text{Sol}(X_\partial; \text{sc}_\sigma^- f_\lambda) \neq \emptyset$.

Remark 8. It is clear that this theorem remains valid if instead of the countable σ -coerciveness of $\text{sc}_\sigma^- f_\lambda$ on X_∂ we assume the sequential σ -compactness of the set X_∂ .

Now we are able to prove the main result of this paper.

Theorem 4. Let X be a reflexive Banach space, σ be the weak topology on X , V be a separable Banach space, and the Banach space $Y = V^*$ be endowed with the weak-* topology τ and partially ordered with a pointed cone $\Lambda = K^*$, where K is a convex pointed cone in V with non-empty algebraic interior $\text{cor}(K)$. Let also X_∂ be a non-empty sequential σ -compact subset of X , and let $f : X_\partial \rightarrow Y$ be a

given mapping (not necessary $(\Lambda, \sigma \times \tau)$ -lower semicontinuous on X_∂). Then the following inclusion is valid:

$$\bigcup_{\lambda \in K^\#} \operatorname{Argmin}_{x \in X_\partial} \operatorname{sc}_\sigma^- f_\lambda(x) \subseteq \operatorname{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_\partial; f; \Lambda). \quad (5.3)$$

Proof. To begin with, we note that the convexity of the pointed cone K and condition $\operatorname{cor}(K) \neq \emptyset$ imply the inclusion $\operatorname{cor}(K) \subset K^\#$ (see [11]). Hence the quasi interior $K^\#$ of K is non-empty. Let λ be any element of $K^\#$. Then, by Proposition 5, there exists at least one element $x^* \in X_\partial$ such that

$$x^* \in \operatorname{Argmin}_{x \in X_\partial} \operatorname{sc}_\sigma^- f_\lambda(x). \quad (5.4)$$

Since $\operatorname{sc}_\sigma^- f_\lambda(x)$ is the lower σ -semicontinuous envelope of the

$$f_\lambda(x) = \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V},$$

it follows that there exists a sequence $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X_\partial$ such that $x_k \xrightarrow{\sigma} x^*$ and

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} &= \operatorname{sc}_\sigma^- f_\lambda(x^*) \leq \\ &\text{by condition (5.4)} \\ &\leq \operatorname{sc}_\sigma^- f_\lambda(x) \leq \langle f(x), \lambda \rangle_{Y;V} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$\forall x \in X_\partial$. Since $K^\# \cup 0_V$ is a nontrivial convex cone in V with non-empty algebraical interior, it follows that it is a reproducing cone in V , that is,

$$\left[K^\# \cup 0_V \right] - \left[K^\# \cup 0_V \right] = V$$

(see [11]). Then, following Peressini [17] and Borwein [6], we have that in the dual space $Y = V^*$ the ordering cone $\Lambda = K^*$ is normal with respect to the norm topology of Y , that is,

$$y <_\Lambda z \implies \|y\| < \|z\|. \quad (5.6)$$

Now, turning back to the formula (5.5), we get: there exist an integer $\widehat{k} \in \mathbb{N}$ and an element $\widehat{y} \in Y$ such that

$$\langle f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} < \langle \widehat{y}, \lambda \rangle_{Y;V} \quad \forall k > \widehat{k}.$$

Since $\lambda \in K^\#$, this implies $f(x_k) <_\Lambda \widehat{y}$ for all $k > \widehat{k}$. Using the normality property (5.6) of the cone Λ for the norm topology of Y , we come to the conclusion: there exists a constant $c > 0$ such that

$$\|f(x_k)\|_Y \leq C \quad \text{for all } k > \widehat{k}.$$

Hence, without loss of generality, we may suppose that the sequence $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty$ is bounded in Y . So, by Banach-Alaoglu Theorem, there exist an element $\eta \in Y$ and a subsequence of $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty$ (still denoted by suffix k) such that $f(x_k) \xrightarrow{\tau} \eta$ in Y as $k \rightarrow \infty$.

For now we assume that

$$x^* \notin \text{GenEff}_{\sigma, \tau}(X_{\partial}; f; \Lambda). \quad (5.7)$$

Then, as follows from Definition 16, $\eta \notin \text{Inf}_{x \in X_{\partial}}^{\Lambda, \tau} f(x)$. Hence, there can be found an element $\xi \in \text{Inf}_{x \in X_{\partial}}^{\Lambda, \tau} f(x)$ such that $\xi <_{\Lambda} \eta$. Therefore, $\eta - \xi \in \Lambda \setminus \{0_Y\}$, and using the fact that $\lambda \in K^{\sharp}$, we just come to the inequality

$$\langle \eta, \lambda \rangle_{Y;V} > \langle \xi, \lambda \rangle_{Y;V}$$

which is equivalent to

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} > \langle \xi, \lambda \rangle_{Y;V}. \quad (5.8)$$

On the other hand, for the element $\xi \in \text{Inf}_{x \in X_{\partial}}^{\Lambda, \tau} f(x)$ there exists a sequence $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X_{\partial}$ such that $f(v_k) \xrightarrow{\tau} \xi$ in Y . Since the set X_{∂} is sequentially σ -compact, we may suppose that $v_k \xrightarrow{\sigma} v^* \in X_{\partial}$. Then, by inequality (5.5), we deduce

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} \leq \langle f(v_i), \lambda \rangle_{Y;V}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (5.9)$$

Passing to the limit in (5.9) as $i \rightarrow \infty$, we get

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x_k), \lambda \rangle_{Y;V} \leq \langle \xi, \lambda \rangle_{Y;V}.$$

However, this contradicts (5.8) and hence (5.7). Thus, x^* is the (σ, τ) -generalized solution to vector optimization problem $\langle X_{\partial}, f, \Lambda, \tau \rangle$. $\square$

References

1. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. — М. : Наука, 1967. — 415 с.
2. Довженко А. В. Квазі-неперервна знизу регуляризація відображень в банахових просторах // А. В. Довженко, П. І. Когут // Вісник ДНУ, 2009. — Т. 17, № 6/1. — С. 91–109.
3. Ait Mansour M., Metrane A., Théra M. Lower Semicontinuous Regularization for Vector-Valued Mappings, J. Global Optimization, 2006. — Vol. 35, N. 2. — P. 283–309.
4. Akian M., Singer I. Topologies on lattice ordered groups, separations from closed downwards and conjugations of type Lau // Optimization, 2003. — Vol. 52, № 4. — P. 629–673.
5. Aubin J. P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. — Cambridge : Birkhäuser, 1990.
6. Borwein J. M. Continuity and differentiability properties of convex operators // Optimization, 1982. — Vol. 44, N 3. — P. 420–444.
7. Borwein J. M., Penot J. P., Théra M. Conjugate Convex Operators // Math. Anal. and Appl., 1984. — Vol. 102. — P. 399–414.
8. Combari C., Laghdir M., Thibault L. Sous-différentiel de fonctions convexes composées // Ann. Sci. Math. Québec, 1994. — Vol. 18, N 2. — P. 119–148.
9. Ehrgott M. Multicriteria Optimization. — Berlin : Springer, 2005.
10. Finet C., Quarta L., Troestler C. Vector-valued variational principles // Institute de Mathématique et d'Informatique, Université de Mons-Hainaut, 2001. — (Preprint #4, January 19).

11. *Jahn J.* Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions. — Berlin : Springer-Verlag, 2004.
12. *Kogut P. I., Manzo R., Nechay I. V.* On existence of efficient solutions to vector optimization problems in Banach spaces // *Note de Matematica*, 2009 (to appear).
13. *Luc D. T.* Theory of Vector Optimization. — N. Y. : Springer-Verlag, 1989.
14. *Luc D. T.* Scalarization of vector optimization problems // *Journal of Optim. Theory and Appl. (JOTA)*, 2005. — Vol. 55, N 1. — P. 85–102.
15. *Miglierina E., Molho E.* Scalarization and its stability in vector optimization // *Journal of Optim. Theory and Appl. (JOTA)*, 2002. — Vol. 111, N 1. — P. 657–670.
16. *Penot J. P., Théra M.* Semi-continuous mappings in general topology // *Arch. Math.*, 1982. — Vol. 38. — P. 158–166.
17. *Peressini A. L.* Ordered Topological Vector Spaces. — N. Y. : Harpet and Row, 1967.
18. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Theory of Multiobjective Optimization. — Orlando : Academic Press, 1985.
19. *Théra M.* Études des fonctions convexes vectorielles semi-continues // *Thèse de 3^e cycle.*, Université de Pau, 1978.
20. *Yu P. L.* Cone convexity, cone extreme points and non-dominated solutions in decision problems with multiobjectivity // *Journal of Optim. Theorey and Appl. (JOTA)*, 1974. — Vol. 14. — P. 319–377.

Надійшла до редакції 01.08.2009

УДК 517.91

**ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО
УРАВНЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ**

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.*

Рассмотрена вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полугораниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода отражений и на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова. Метод интегрального представления, телеграфное уравнение, метод отражений.

1. Введение

В физике достаточно часто используются математические модели, основой которых является телеграфное уравнение. Такого рода модели позволяют учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. С целью решения такого рода задач в [1] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение первой краевой задачи [2]. В настоящей статье подобным методом строится решение второй краевой задачи в полугораниченной области.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $x - x_n > 0$, $t > t_n$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + C u(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t_n) = 0, \quad u_t(x, t_n) = 0, \quad x > x_n \quad (2.2)$$

и краевому условию второго типа

$$u_x(x_n, t) = \nu(t - t_n), \quad t > t_n. \quad (2.3)$$

Для решения этой задачи, прежде всего, строится продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t :

$$N(t - t_{\text{н}}) = \begin{cases} \nu(t - t_{\text{н}}), & t > t_{\text{н}}; \\ 0, & t < t_{\text{н}}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Краевое условие (2.3) также продолжается на всю ось t :

$$u_x(x_{\text{н}}, t) = N(t - t_{\text{н}}). \quad (2.5)$$

3. Решение задачи

Учитывая, что краевое условие (2.5) задано в виде производной, решение задачи отыскивается в виде функции [1]:

$$u(x, t) = e^{\frac{B}{2}(x-x_{\text{н}})} \int_0^{t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}} J_0(z) e^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_{\text{н}}-\eta)} N_0(\eta) d\eta \quad (3.1)$$

с неизвестной функцией $N_0(\eta)$. Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка,

$$z = \sqrt{c_1 \left[(x - x_{\text{н}})^2 - \alpha^2 ((t - t_{\text{н}}) - \eta)^2 \right]}; \quad (3.2)$$

$$c_1 = C + \frac{D^2\alpha^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \quad (3.3)$$

Функция (3.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) при произвольной функции $N_0(t)$.

Для анализа краевого условия (2.5) вычислим производную функции (3.1) по x . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & -\frac{1}{\alpha} e^{-\frac{B-D\alpha}{2}(x-x_{\text{н}})} N_0\left(t - t_{\text{н}} - \frac{x - x_{\text{н}}}{\alpha}\right) + \\ & e^{-\frac{B}{2}(x-x_{\text{н}})} \int_0^{t-t_{\text{н}}-\frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x - x_{\text{н}}}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_{\text{н}}-\eta)} N_0(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При вычислении этой производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = c_1 \frac{x - x_{\text{н}}}{z},$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial x} = \frac{dJ_0(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x - x_{\text{н}})}{z} \frac{dJ_0(z)}{dz} = -\frac{c_1(x - x_{\text{н}})}{z} J_1(z),$$

так как

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z).$$

Учтено также, что $z = 0$ при $\eta = t - t_{\text{н}} - \frac{x-x_{\text{н}}}{\alpha}$, а $J_0(0) = 1$.

Подставим теперь форму решения (3.1) в краевое условие (2.5) с учетом (3.4). Получим:

$$-\frac{1}{\alpha}N_0(t-t_n) - \int_0^{t-t_n} \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_n-\eta)}N_0(\eta)d\eta = N(t-t_n). \quad (3.5)$$

В равенстве (3.5) следует принимать

$$z|_{x=x_n} = \alpha(t-t_n-\eta)\sqrt{-c_1}. \quad (3.6)$$

Равенство (3.5) представляет собой интегральное уравнение для определения функции N_0 . Выполним в уравнении (3.5) преобразование

$$\tau = t - t_n. \quad (3.7)$$

Тогда уравнение (3.5) примет вид:

$$-\frac{1}{\alpha}N_0(\tau) - \int_0^\tau \frac{B}{2}J_0(\alpha(\tau-\eta)\sqrt{-c_1})e^{\frac{D\alpha^2}{2}(\tau-\eta)}N_0(\eta)d\eta = N(\tau). \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) и свойства (2.4) функции $N(\tau)$ следует, что функция $N_0(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$N_0(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (3.9)$$

В силу свойства (3.9) функции $N_0(\tau)$ функция (3.1) будет удовлетворять начальным условиям (2.2). Действительно, при $t = t_n$ из формулы (3.1) получаем:

$$u(x, t_n) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \int_0^{-\frac{x-x_n}{\alpha}} J_0(z)e^{-\frac{D\alpha^2}{2}\eta}N_0(\eta)d\eta.$$

При $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования в этой формуле отрицателен и, следовательно, на основании свойства (3.9) функции $N_0(\tau)$, $u(x, t_n)$. Иными словами, функция (3.1) удовлетворяет первому начальному условию (2.2). Продифференцируем функцию (3.1) по t . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} & \left[e^{\frac{D\alpha}{2}(x-x_n)}N_0\left(t-t_n - \frac{x-x_n}{\alpha}\right) + \right. \\ & \left. \int_0^{t-t_n - \frac{x-x_n}{\alpha}} \left[\frac{D\alpha^2}{2}J_0(z) + c_1\alpha^2 \frac{t-t_n-\eta}{z}J_1(z) \right] e^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_n-\eta)}N_0(\eta)d\eta \right]. \quad (3.10) \end{aligned}$$

При вычислении производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1\alpha^2(t-t_n-\eta)}{z},$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{dJ_0(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 \alpha^2 (t - t_n - \eta)}{z} \frac{dJ_0(z)}{dz} = \frac{c_1 \alpha^2 (t - t_n - \eta)}{z} J_1(z).$$

Из формулы (3.10) при $t = t_n$ получаем:

$$u_t(x, t_n) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \left[e^{\frac{D\alpha}{2}(x-x_n)} N_0\left(-\frac{x-x_n}{\alpha}\right) + \int_0^{-\frac{x-x_n}{\alpha}} \left[\frac{D\alpha^2}{2} J_0(z) - c_1 \alpha^2 \frac{\eta}{z} J_1(z) \right] e^{-\frac{D\alpha^2}{2}\eta} N_0(\eta) d\eta \right].$$

В правой части этой формулы при $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования и аргумент функции $N_0(\tau)$ отрицательны. Поэтому, на основании свойства (3.9) функции $N_0(\tau)$, $u_t(x, t_n) = 0$. А это значит, что функция (3.1) удовлетворяет второму начальному условию (2.2).

Таким образом, показано, что функция (3.1) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является ее решением.

4. Выводы

В результате применения комбинации интегрального представления решения и метода продолжений получено в квадратурах решение второй краевой задачи для телеграфного уравнения. Анализ формулы (3.1), представляющей решение задачи, показывает, что это решение имеет характер распространяющихся со скоростью α волн. В то же время в процессе распространения происходит искажение этих волн, зависящее от коэффициентов B и D при первых производных в уравнении (2.1).

Разработанный метод может быть применен для решения других краевых задач подобного типа. В частности, с его помощью могут быть решены краевые задачи для полуграниченных областей с иными краевыми условиями. В дополнительной комбинации с методом отражений могут быть также получены решения краевых задач для ограниченных областей.

Библиографические ссылки

1. Остапенко В. А. Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 3–17.
2. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полуграниченной области // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 18–20.

Надійшла до редакції 28.09.2009

УДК 681.31

ON THE EXISTENCE OF WEAK OPTIMAL BV -CONTROLS
IN COEFFICIENTS FOR LINEAR ELLIPTIC PROBLEMS

I. G. Balanenko*, P. I. Kogut**

* *Department of Differential Equations Dnipropetrovsk National University Naukova str., 13, 49050 Dnipropetrovsk, Ukraine E-mail: balanenko-ig@rambler.ru*** *Department of Differential Equations Dnipropetrovsk National University Naukova str., 13, 49050 Dnipropetrovsk, Ukraine E-mail: p.kogut@i.ua*

In this paper we study the optimal control problem associated to a linear degenerate elliptic equation with mixed boundary conditions. We adopt a weight coefficient in the main part of elliptic operator as control in $BV(\Omega)$. Since the equations of this type can exhibit the Lavrentieff phenomenon and non-uniqueness of weak solutions, we show that this optimal control problem is regular. Using the direct method in the Calculus of variations, we discuss the solvability of the above optimal control problems in the class of weak admissible solutions.

Key words. Optimal control problem, degenerate elliptic equation, mixed boundary conditions, Lavrentieff phenomenon, weak admissible solutions.

1. Introduction

The aim of this work is to study the existence of optimal solutions in coefficients associated to a linear degenerate elliptic equation with mixed boundary condition. By control variable we mean the weight coefficient in the main part of the elliptic operator. The precise answer of existence or none-existence of an L^1 -optimal solutions is heavily depending on the class of admissible controls. Here are the main questions: what is the right setting of optimal control problem with BV -controls in coefficients, and what is the right class of admissible solutions to the above problem? Using the direct method in the Calculus of variations, we discuss the solvability of the above optimal control problem in the so-called class of weak admissible solutions.

The optimal control problem we consider in this paper is closely related with the optimal reinforcement of an elastic membranes [2]. Reinforcing an elastic structure subjected to a given load is a problem which arises in several applications. The literature on the topic is very wide; for a clear description of the problem from a mechanical point of view and a related bibliography we refer for instance to the beautiful paper by Villaggio [6].

In the simplest case when we have an elastic membrane occupying a domain Ω and subjected to a given exterior load $f \in L^2(\Omega)$, the shape u of the membrane in the equilibrium configuration is characterized as the solution of the partial differential equation

$$-\operatorname{div} \rho(x) \nabla y + y = f \quad \text{in } \Omega$$

together with the corresponding Dirichlet and Neumann boundary conditions on $\partial\Omega$. The reinforcement of the membrane is usually performed by the addition of suitable stiffeners, whose total amount is prescribed. Mathematically, this is described by a nonnegative coefficient $\rho(x)$ which acts in Ω and is associated with some weight coefficient in the main part of elliptic operator. As a result, the problem of finding an optimal reinforcement for the membrane then consists in the determination of a weight $\rho(x) \geq 0$ which optimizes a given cost functional. In contrast to the pioneer paper in this field (see [2]), we do not restrict of our analysis to the particular case of the reinforcement problems. We also do not make use any relaxations for the original optimal control problem.

2. Notation and Preliminaries

In this section we introduce some notation and preliminaries that will be useful later on.

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) with a Lipschitz boundary. We assume that the boundary of Ω is made of two disjoint parts

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

with Dirichlet boundary conditions on Γ_D , and Neumann boundary conditions on Γ_N . Let χ_E be the characteristic function of a subset $E \subseteq \Omega$, i. e. $\chi_E(x) = 1$ if $x \in E$, and $\chi_E(x) = 0$ if $x \notin E$.

Let

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_D \}.$$

The space $W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D)$ is the closure of $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$ in the classical Sobolev space $W^{1,1}(\Omega)$. For any subset $E \subset \Omega$ we denote by $|E|$ its N -dimensional Lebesgue measure $\mathcal{L}^N(E)$.

Hereinafter a locally integrable function ρ on $\mathbb{R}^N$ such that $\rho(x) \geq 0$ for a. e. $x \in \mathbb{R}^N$ is called a weight function. As a matter of fact every weight ρ gives rise to a measure on the measurable subsets of $\mathbb{R}^N$ through integration. This measure will also be denoted by ρ . Thus $\rho(E) = \int_E \rho dx$ for measurable sets $E \subset \mathbb{R}^N$.

Let ρ be a weight. We will use the standard notation $L^2(\Omega, \rho dx)$ for the set of measurable functions f on Ω such that

$$\|f\|_{L^2(\Omega, \rho dx)} = \left(\int_\Omega f^2 \rho dx \right)^{1/2} < +\infty.$$

We say that a weight function $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ is degenerate on Ω if

$$\rho + \rho^{-1} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad (2.1)$$

that is, the sum $\rho + \rho^{-1}$ does not belong to $L^\infty(\Omega)$. Note that in this case the functions in $L^2(\Omega, \rho dx)$ are integrable on Ω .

With each of the degenerate weight functions ρ we will associate two weighted Sobolev spaces $W_\rho = W(\Omega, \rho dx)$ and $H_\rho = H(\Omega, \rho dx)$, where W_ρ is the set of functions $y \in W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D)$ for which the norm

$$\|y\|_\rho = \left(\int_\Omega (y^2 + \rho |\nabla y|^2) dx \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

is finite, and H_ρ is the closure of $C_0^\infty(\Omega; \Gamma_D)$ in W_ρ . Note that due to the estimates

$$\int_\Omega |y| dx \leq \left(\int_\Omega |y|^2 dx \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \leq C \|y\|_\rho, \quad (2.3)$$

$$\int_\Omega |\nabla y| dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla y|^2 \rho dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \rho^{-1} dx \right)^{1/2} \leq C \|y\|_\rho, \quad (2.4)$$

the space W_ρ is complete with respect to the norm $\|\cdot\|_\rho$. It is clear that $H_\rho \subseteq W_\rho$, and W_ρ , H_ρ are Hilbert spaces. If ρ is a non-degenerate weight function, that is, ρ is bounded between two positive constants, then it is easy to verify that $W_\rho = H_\rho$. However, for a "typical" degenerate weight ρ the space of smooth functions $C_0^\infty(\Omega)$ is not dense in W_ρ . Hence the identity $W_\rho = H_\rho$ is not always valid (for the corresponding examples we refer to [3, 7, 8]).

Weak Compactness Criterion in $L^1(\Omega)$. Throughout the paper we will often use the concepts of the weak and strong convergence in $L^1(\Omega)$. Let $\{a_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ be a sequence in $L^1(\Omega)$. We recall that $\{a_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is called equi-integrable if for any $\delta > 0$ there is $\tau = \tau(\delta)$ such that $\int_S |a_\varepsilon| dx < \delta$ for every measurable subset $S \subset \Omega$ of Lebesgue measure $|S| < \tau$.

Then the following assertions are equivalent:

- (i) a sequence $\{a_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is weakly compact in $L^1(\Omega)$;
- (ii) the sequence $\{a_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is equi-integrable;
- (iii) given $\delta > 0$ there exists $\lambda = \lambda(\delta)$ such that $\sup_{\varepsilon>0} \int_{\{|a_\varepsilon|>\lambda\}} |a_\varepsilon| dx < \delta$.

Theorem 1 (Lebesgue's Theorem). *If a sequence $\{a_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^1(\Omega)$ is equi-integrable and $a_\varepsilon \rightarrow a$ almost everywhere in Ω then $a_\varepsilon \rightarrow a$ in $L^1(\Omega)$.*

Radon measures. By a nonnegative Radon measure on Ω we mean a nonnegative Borel measure which is finite on every compact subset of Ω . The space of all nonnegative Radon measures on Ω will be denoted by $\mathcal{M}_+(\Omega)$. According to the Riesz theory, each Radon measure $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ can be interpreted as element of the dual of the space $C_0(\Omega)$ of all continuous functions vanishing at infinity. Let $M(\Omega; \mathbb{R}^N)$ denotes the space of all $\mathbb{R}^N$ -valued Borel measures. Then

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in M(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_i \in C'_0(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

If μ is a nonnegative Radon measure on Ω , we will use $L^r(\Omega, d\mu)$, $1 \leq r \leq \infty$, to denote the usual Lebesgue space with respect to the measure μ with the corresponding norm

$$\|f\|_{L^r(\Omega, d\mu)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^r d\mu \right)^{1/r}.$$

Functions with Bounded Variation. Let $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ be a function of $L^1(\Omega)$. Define

$$\int_\Omega |Df| = \sup \left\{ \int_\Omega f \operatorname{div} \varphi dx : \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \right. \\ \left. |\varphi(x)| \leq 1 \text{ for } x \in \Omega \right\},$$

where

$$\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

Then Df is a measure, in general. According to the Radon-Nikodym theorem, if

$$\int_{\Omega} |Df| < +\infty$$

then there exist a vector-valued function $\nabla f \in [L^1(\Omega)]^N$ and a measure $D_s f$, singular with respect to the N -dimensional Lebesgue measure $\mathcal{L}^N|_{\Omega}$ restricted to Ω , such that

$$Df = \nabla f \mathcal{L}^N|_{\Omega} + D_s f.$$

Definition 1. A function $f \in L^1(\Omega)$ is said to have bounded variation in Ω if

$$\int_{\Omega} |Df| < \infty.$$

By $BV(\Omega)$ we denote the space of all functions in $L^1(\Omega)$ with bounded variation.

Under the norm

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Df|,$$

$BV(\Omega)$ is a Banach space. It is well-known the following compactness result for BV -functions:

Proposition 1. The uniformly bounded sets in BV -norm are relatively compact in $L^1(\Omega)$.

Definition 2. A sequence $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset BV(\Omega)$ weakly converges to some $f \in BV(\Omega)$, and we write $f_k \rightharpoonup f$ iff the two following conditions hold: $f_k \rightarrow f$ strongly in $L^1(\Omega)$, and $Df_k \rightharpoonup Df$ weakly-* in $M(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

In the proposition below we give a compactness result related to this convergence, together with the lower semicontinuity property (see [4]):

Proposition 2. Let $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence in $BV(\Omega)$ strongly converging to some f in $L^1(\Omega)$ and satisfying $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |Df_k| < +\infty$. Then

$$(i) \quad f \in BV(\Omega) \text{ and } \int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_k|;$$

$$(ii) \quad f_k \rightharpoonup f \text{ in } BV(\Omega).$$

Convergence in variable spaces. Let $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, μ be Radon measures such that $\mu_k \xrightarrow{*} \mu$ in $\mathcal{M}_+(\Omega)$, i. e.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi d\mu_k = \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N), \quad (2.5)$$

where $C_0(\mathbb{R}^N)$ is the space of all compactly supported continuous functions. The typical example of such measures is

$$d\mu_k = \rho_k(x) dx, \quad d\mu = \rho(x) dx, \quad \text{where } 0 \leq \rho_k \rightharpoonup \rho \text{ in } L^1(\Omega).$$

Let us recall the definition and main properties of convergence in the variable L^2 -space (see [7]).

1. A sequence $\{v_k \in L^2(\Omega, d\mu_k)\}$ is called bounded if

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_k|^2 d\mu_k < +\infty.$$

2. A bounded sequence $\{v_k \in L^2(\Omega, d\mu_k)\}$ converges weakly to $v \in L^2(\Omega, d\mu)$ if

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k \varphi d\mu_k = \int_{\Omega} v \varphi d\mu \quad \text{for any } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

and it is written as $v_k \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega, d\mu_k)$.

3. The strong convergence $v_k \rightarrow v$ in $L^2(\Omega, d\mu_k)$ means that $v \in L^2(\Omega, d\mu)$ and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k z_k d\mu_k = \int_{\Omega} v z d\mu \quad \text{as } z_k \rightharpoonup z \text{ in } L^2(\Omega, d\mu_k). \quad (2.6)$$

The following convergence properties in variable spaces hold:

- (a) *Compactness criterium*: if a sequence is bounded in $L^2(\Omega, d\mu_k)$, then this sequence is compact in the sense of the weak convergence;

- (b) *Property of lower semicontinuity*: if $v_k \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega, d\mu_k)$, then

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_k|^2 d\mu_k \geq \int_{\Omega} v^2 d\mu; \quad (2.7)$$

- (c) *Criterium of strong convergence*: $v_k \rightarrow v$ if and only if $v_k \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega, d\mu_k)$ and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_k|^2 d\mu_k = \int_{\Omega} v^2 d\mu. \quad (2.8)$$

3. Setting of the Optimal Control Problem

Let $m \in \mathbb{R}_+$ be some positive value, and let ξ_1, ξ_2 be given elements of $L^1(\Omega)$ satisfying the conditions

$$\xi_1(x) \leq \xi_2(x) \text{ a.e. in } \Omega, \quad \xi_1^{-1} \in L^1(\Omega). \quad (3.1)$$

To introduce the class of admissible BV-controls we adopt the following concept:

Definition 3. We say that a nonnegative weight ρ is an admissible control to the boundary value problem

$$-\operatorname{div} \rho(x) \nabla y + y = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2)$$

$$y = 0 \text{ on } \Gamma_D, \quad \rho(x) \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma_N, \quad (3.3)$$

(it is written as $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$) if

$$\rho \in BV(\Omega), \quad \int_{\Omega} \rho dx = m, \quad \xi_1(x) \leq \rho(x) \leq \xi_2(x) \text{ a.e. in } \Omega. \quad (3.4)$$

Here $f \in L^2(\Omega)$ is a given function.

Hereinafter we assume that the set $\mathcal{R}_{ad}$ is nonempty.

Remark 1. In view of the property (3.1), we have the boundary value problem for the degenerate elliptic equation. It means that for some admissible controls $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$ the boundary value problem (3.2)–(3.3) can exhibit the Lavrentieff phenomenon, the nonuniqueness of the weak solutions as well as other surprising consequences.

The optimal control problem we consider in this paper is to minimize the discrepancy between a given distribution $y_d \in L^2(\Omega)$ and the solution of boundary valued problem (3.2)–(3.3) by choosing an appropriate weight function $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$. More precisely, we are concerned with the following optimal control problem

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \left\{ I(\rho, y) = \int_{\Omega} |y(x) - y_d(x)|^2 dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega} |\nabla y(x)|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx + \int_{\Omega} |D\rho| \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

subject to the constraints (3.2)–(3.4).

Definition 4. We say that a function $y = y(\rho, f) \in W_{\rho}$ is a weak solution to the boundary value problem (3.2)–(3.3) for a fixed control $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$ if the integral identity

$$\int_{\Omega} ((\nabla y, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \rho + y \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (3.6)$$

holds for any $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega; \Gamma_D)$.

It is clear that the question of uniqueness of a weak solution leads us to the problem of density of the subspace of smooth functions $C_0^{\infty}(\Omega; \Gamma_D)$ in W_{ρ} . However, as was indicated in [9], for a "typical" degenerate weight function ρ the subspace $C_0^{\infty}(\Omega; \Gamma_D)$ is not dense in W_{ρ} , and hence there is no uniqueness of weak solutions (for more details and another types of solutions we refer to [1, 5, 7, 9]). Thus the mapping $\rho \mapsto y(\rho, f)$ is multivalued, in general. Taking this fact into account, we introduce the following set

$$\Xi_W = \{(B\rho, y) \mid \rho \in \mathcal{R}_{ad}, y \in W_{\rho}, (\rho, y) \text{ are related by (3.6)}\}. \quad (3.7)$$

Note that the set Ξ_W is always nonempty. Indeed, let V_{ρ} be some intermediate space with $H_{\rho} \subseteq V_{\rho} \subseteq W_{\rho}$. We say that a function $y = y(\rho, f) \in V_{\rho}$ is a V_{ρ} -solution or variational solution to the boundary value problem (3.2)–(3.3) if the integral identity (3.6) holds for every test function $\varphi \in V_{\rho}$. Hence, in this case the energy equality

$$\int_{\Omega} (|\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho + y^2) dx = \int_{\Omega} f y dx \quad (3.8)$$

must be valid. Since

$$\left| \int_{\Omega} f y \right| \leq \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} y^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|y\|_{\rho}$$

for every fixed $f \in L^2(\Omega)$, it follows that the existence and uniqueness of a V_{ρ} -solution are the direct consequence of the Riesz Representation Theorem. Thus

every variational solution is also a weak solution to the problem (3.2)–(3.3). Hence $\Xi_W \neq \emptyset$ and therefore the corresponding minimization problem

$$\left\langle \inf_{(\rho, y) \in \Xi_W} I(\rho, y) \right\rangle \quad (3.9)$$

is regular. In view of this, we adopt the following concept:

Definition 5. We say that a pair

$$(\rho^0, y^0) \in L^1(\Omega) \times W^{1,1}(\Omega; \Gamma_D)$$

is a weak optimal solution to the problem (3.4)–(3.5) if (ρ^0, y^0) is a minimizer for

$$\left\langle \inf_{(\rho, y) \in \Xi_W} I(\rho, y) \right\rangle, \text{ i. e.,}$$

$$(\rho^0, y^0) \in \Xi_W \quad \text{and} \quad I(\rho^0, y^0) = \inf_{(\rho, y) \in \Xi_W} I(\rho, y).$$

The main question to be answered on the optimal control problem (3.4)–(3.5) in this paper is about its solvability in the class of the weak solutions. It should be noted that to the best knowledge of the authors, the existence of optimal pairs to the above problem in the sense of Definition 5 has not been considered in the literature.

4. Existence Theorem for Weak Optimal Solutions

Our prime interest in this section deals with the solvability of optimal control problem (3.4)–(3.5) in the class of the weak solutions. To begin with we establish some auxiliary results that will be useful later. Let $\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}}$ be any sequence of the weak admissible solutions.

Lemma 1. *Let $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence in $\mathbb{R}_{ad}$ such that $\rho_k \rightarrow \rho$ in $L^1(\Omega)$ as $k \rightarrow \infty$. Then*

$$(\rho_k)^{-1} \rightarrow \rho^{-1} \quad \text{in the variable space } L^2(\Omega, \rho_k dx).$$

Proof. To proof this result we make use some ideas of the paper [9]. By the properties of the set of admissible controls $\mathbb{R}_{ad}$, we have

$$\int_{\Omega} |\rho_k^{-1}| dx \leq \int_{\Omega} |\xi_1^{-1}| dx \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

that is the sequence $\{\rho_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ is equi-integrable on Ω . Note that, up to a subsequence, we have $\rho_k \rightarrow \rho$ a.e. in Ω . Since

$$\xi_2^{-1} \leq \rho_k^{-1} \leq \xi_1^{-1},$$

Lebesgue Theorem implies

$$\rho_k^{-1} \rightarrow \rho^{-1} \quad \text{in } L^1(\Omega). \quad (4.1)$$

Let $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ be a fixed function. Then the equality

$$\int_{\Omega} \rho_k^{-1} \varphi \rho_k dx \equiv \int_{\Omega} \varphi dx = \int_{\Omega} \rho^{-1} \varphi \rho dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

leads us to the weak convergence $\rho_k^{-1} \rightharpoonup \rho^{-1}$ in $L^2(\Omega, \rho_k dx)$. It should be stressed here that, by the initial assumptions, $\rho_k dx \xrightarrow{*} \rho dx$ in the space of Radon measures $\mathcal{M}_+(\Omega)$ (see (2.5)). However, taking into account the strong convergence $\rho_k^{-1} \rightarrow \rho^{-1}$ in $L^1(\Omega)$ and the fact that Ω is a bounded domain, we get

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\rho_k|^{-2} \rho_k dx \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_k^{-1} dx = \int_{\Omega} \rho^{-1} dx \equiv \int_{\Omega} |\rho|^{-2} \rho dx.$$

Hence, by the criterium of the strong convergence in variable space $L^2(\Omega, \rho_k dx)$, we just come to the required conclusion. The proof is complete. $\square$

Our next intension deals with the study of topological properties of the set of weak admissible solutions Ξ_W to the problem (3.2)–(3.5). To do so, we introduce the following concepts:

Definition 6. A sequence $\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}}$ is called to be bounded if

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left[\|\rho_k\|_{BV(\Omega)} + \|y_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla y_k\|_{L^2(\Omega, \rho_k dx)^N} \right] < +\infty.$$

Definition 7. We say that a bounded sequence $\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}}$ of the weak admissible solutions τ -converges to a pair $(\rho, y) \in BV(\Omega) \times W^{1,1}(\Omega)$ if

- (a) $\rho_k \rightharpoonup \rho$ in $BV(\Omega)$;
- (d) $y_k \rightharpoonup y$ weakly in $L^2(\Omega)$;
- (e) $\nabla y_k \rightharpoonup \nabla y \ni L^2(\Omega, \rho dx)^N$ in the variable space $L^2(\Omega, \rho_k dx)^N$.

Note that due to the suppositions (3.1), (3.4), and estimates like (2.3)–(2.4), the inclusion $y \in W^{1,1}(\Omega)$ is obvious.

Lemma 2. Let $\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}}$ be a bounded sequence. Then there is a pair $(\rho, y) \in BV(\Omega) \times W^{1,1}(\Omega)$ such that, up to a subsequence, $(\rho_k, y_k) \xrightarrow{\tau} (\rho, y)$ and $y \in W_\rho$.

Proof. To begin with, we note that by Proposition 1 and the compactness criterium of the weak convergence in variable spaces, there exist a subsequence of

$$\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}},$$

still denoted by the suffix k , and functions $\rho \in BV(\Omega)$, $y \in L^2(\Omega)$, and $v \in L^2(\Omega, \rho dx)^N$ such that

$$\rho_k \rightarrow \rho \text{ in } L^1(\Omega), \quad \rho_k dx \xrightarrow{*} \rho dx \text{ in } M_+(\Omega), \quad (4.2)$$

$$y_k \rightharpoonup y \text{ in } L^2(\Omega), \quad \nabla y_k \rightharpoonup v \text{ in the variable space } L^2(\Omega, \rho_k dx). \quad (4.3)$$

Let us show that $y \in W^{1,1}(\Omega)$, and $v = \nabla y$. Since $\xi_1 \leq \rho_k \leq \xi_2$ for every $k \in \mathbb{N}$, the claim (4.2) and Lemma 1 imply the property (see (4.1))

$$\rho_k^{-1} \rightarrow \rho^{-1} \text{ in } L^1(\Omega), \quad \xi_1 \leq \rho \leq \xi_2 \text{ a.e. in } \Omega. \quad (4.4)$$

This yields that the sequence $\{\nabla y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is weakly compact in $L^1(\Omega)^N$. Indeed, the property of its equi-integrability immediately follows from the inequality

$$\int_{\Omega} |\nabla y_k| dx \leq \left(\int_{\Omega} \rho_k^{-1} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla y_k|^2 \rho_k dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} \rho_k^{-1} dx \right)^{1/2}.$$

As a result, using the strong convergence $(\rho_k)^{-1} \rightarrow \rho^{-1}$ in the variable space $L^2(\Omega, \rho_k dx)$ (see Lemma 1) and its properties, we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla y_k, \psi)_{\mathbb{R}^N} dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_k^{-1} (\nabla y_k, \psi)_{\mathbb{R}^N} \rho_k dx \\ &= \int_{\Omega} \rho^{-1} (v, \psi)_{\mathbb{R}^N} \rho dx = \int_{\Omega} (v, \psi)_{\mathbb{R}^N} dx \end{aligned}$$

for all $\psi \in C_0^\infty(\Omega)^N$. Thus $\nabla y_k \rightharpoonup v$ in $L^1(\Omega)^N$. Since by estimate (2.3) $y \in L^1(\Omega)$, this implies that $y \in W^{1,1}(\Omega)$ and $\nabla y = v$. As for the inclusion $y \in W_\rho$ this is immediately follows from the claims (4.2)–(4.3). The proof is complete. $\square$

The next result is crucial for our analysis.

Theorem 2. *For every $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ the set Ξ_W is sequentially closed with respect to the τ -convergence.*

Proof. Let $\{(\rho_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi_W$ be a bounded τ -convergent sequence of weak admissible pairs to the optimal control problem (3.2)–(3.5). Let (ρ_0, y_0) be its τ -limit. Our aim is to prove that $(\tau_0, y_0) \in \Xi_W$.

By Lemma 2 we have

$$\rho_k \rightarrow \rho_0 \text{ in } L^1(\Omega), \quad \rho_0 \in BV(\Omega), \quad \xi_1 \leq \rho_0 \leq \xi_2 \text{ a.e. in } \Omega. \quad (4.5)$$

Then passing to the limit as $k \rightarrow \infty$ in the relation $\int_{\Omega} \rho_k dx = m$, we just come to the conclusion: $\rho_0 \in \mathcal{R}_{ad}$, i. e. the limit weight function ρ_0 is an admissible control.

It remains to show that the pair (ρ_0, y_0) is related by the integral identity (3.6) for all $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \Gamma_D)$. For every fixed $k \in \mathbb{N}$ we denote by $(\hat{\rho}_k, \hat{y}_k) \in BV_{loc}(\mathbb{R}^N) \times W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ an extension of the functions $(\rho_k, y_k) \in \Xi_W$ to the whole of space $\mathbb{R}^N$ such that the sequence $\{(\hat{\rho}_k, \hat{y}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfies the properties:

$$\hat{\rho}_k \in BV(Q), \quad \xi_1 \leq \hat{\rho}_k \leq \xi_2 \text{ a.e. in } Q, \quad (4.6)$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left[\|\hat{\rho}_k\|_{BV(Q)} + \|\hat{y}_k\|_{L^2(Q)} + \|\nabla \hat{y}_k\|_{L^2(Q, \hat{\rho}_k dx)^N} \right] < +\infty. \quad (4.7)$$

for any bounded domain Q in $\mathbb{R}^N$. Hence, by analogy with Lemma 2 it can be proved that for every bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^N$ there exist functions $\hat{\rho}_0 \in BV(Q)$ and $\hat{y}_0 \in W_{\hat{\rho}_0} = W(Q, \hat{\rho}_0 dx)$ such that

$$\hat{\rho}_k \rightharpoonup \hat{\rho}_0 \text{ in } L^1(Q), \quad \hat{y}_k \rightharpoonup \hat{y}_0 \text{ in } L^2(Q), \quad (4.8)$$

$$\nabla \hat{y}_k \rightharpoonup \nabla \hat{y}_0 \text{ in } L^2(\Omega, \hat{\rho}_0 dx)^N \text{ in the variable space } L^2(\Omega, \hat{\rho}_k dx)^N. \quad (4.9)$$

It is important to note that in this case we have

$$\widehat{y}_0 = y_0 \quad \text{and} \quad \widehat{\rho}_0 = \rho_0 \quad \text{a.e. in } \Omega. \quad (4.10)$$

In what follows, we rewrite the integral identity (3.6) in the equivalent form

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} ((\nabla \widehat{y}_k, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}_k + \widehat{y}_k \varphi) \chi_\Omega(x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi \chi_\Omega(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \Gamma_D), \end{aligned} \quad (4.11)$$

and pass to the limit in (4.11) as $k \rightarrow \infty$. Using the properties (4.8)–(4.9), and the fact that $\chi_\Omega \rightarrow \chi_\Omega$ strongly in the variable space $L^2(Q, \widehat{\rho}_k dx)$, i. e.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Omega^2 \widehat{\rho}_k dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Omega \widehat{\rho}_k dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Omega \widehat{\rho}_0 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Omega^2 \widehat{\rho}_0 dx$$

we just come to the relation

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((\nabla \widehat{y}_0, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}_0 + \widehat{y}_0 \varphi) \chi_\Omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi \chi_\Omega(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \Gamma_D)$$

which is equivalent to the following one

$$\int_{\Omega} ((\nabla \widehat{y}_0, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}_0 + \widehat{y}_0 \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \Gamma_D).$$

As a result, taking into account (4.10) and the fact that $\widehat{y}_0 \in W_{\widehat{\rho}_0}$ (by Lemma 2), we conclude: y_0 is a weak solution to the boundary valued problem (3.2)–(3.3) under $\rho = \rho_0$. Thus the τ -limit pair (τ_0, y_0) belongs to set Ξ_W , and this concludes the proof. $\square$

Now we are in a position to state the existence of weak optimal pairs to the problem (3.2)–(3.5).

Theorem 3. *Let $\xi_1 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ and $\xi_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ be such that $\xi_1 \leq \xi_2$ a.e. in $\mathbb{R}^N$ and $\xi_1^{-1} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Let $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ and $y_d \in L^2(\Omega)$ be given functions. Then the optimal control problem (3.2)–(3.5) admits at least one weak solution*

$$(\rho^{opt}, y^{opt}) \in \Xi_W \subset L^1(\Omega) \times W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D), \quad y^{opt} \in W(\Omega, \rho^{opt} dx)$$

if and only if $\mathcal{R}_{ad} \neq \emptyset$.

Proof. Because the converse statements is obvious, we suppose that the set of admissible controls $\mathcal{R}_{ad}$ is nonempty. Then the minimization problem (3.9) is regular (i. e. $\Xi_W \neq \emptyset$). Let $\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}}$ be a minimizing sequence to (3.9). Then as follows from the inequality

$$\begin{aligned} \inf_{(\rho, y) \in \Xi_W} I(\rho, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |y_k(x) - y_d(x)|^2 dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega} |\nabla y_k(x)|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho_k dx + \int_{\Omega} |D\rho_k| \right] < +\infty, \end{aligned} \quad (4.12)$$

there is a constant $C > 0$ such that

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|y_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\nabla y_k\|_{L^2(\Omega, \rho_k dx)^N} \leq C, \quad \int_{\Omega} |D\rho_k| \leq C.$$

Hence, in view of the definition of the class of admissible controls $\mathcal{R}_{ad}$, the sequence $\{(\rho_k, y_k) \in \Xi_W\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in the sense of Definition 6. Hence, by Lemma 2 there exist functions $\rho^* \in BV(\Omega)$ and $y^* \in W(\Omega, \rho^* dx)$ such that, within a subsequence, $(\rho_k, y_k) \xrightarrow{\tau} (\rho^*, y^*)$. Since the set Ξ_W is sequentially closed with respect to the τ -convergence (see Theorem 2), it follows that the τ -limit pair (ρ^*, y^*) is an admissible weak solution to optimal control problem (3.2)–(3.5) (i. e. $(\rho^*, y^*) \in \Xi_W$). To conclude the proof it is enough to observe that by property (2.7) and Proposition 2, the cost functional I is sequentially lower τ -semicontinuous. Thus

$$I(\rho^*, y^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(\rho_k, y_k) = \inf_{(\rho, y) \in \Xi_W} I(\rho, y).$$

Hence (ρ^*, y^*) is a weak optimal pair, and we come to the required conclusion. $\square$

References

1. *Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P.* Anisotropic equations in L^1 // Diff. Integral Eq., 1996. — Vol. 9. — P. 209–212.
2. *Buttazzo G., Varchon N.* On the optimal reinforcement of an elastic membrane // Riv. Mat. Univ. Parma, 2005. — Vol. 4, N 7. — P. 115–125.
3. *Chiadò Piat V., Serra Cassano F.* Some remarks about the density of smooth functions in weighted Sobolev spaces // J. Convex Analysis, 1994. — Vol. 1, N 2. — P. 135–142.
4. *Giusti E.* Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. — Boston : Birkhäuser, 1984.
5. *Kovalevsky A. A., Gorban Yu. S.* Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1 -data // C.R.A.S. Paris, Sér. I, 2007. — N 345. — P. 441–444.
6. *Villaggio P.* Calcolo delle variazioni e teoria delle strutture // Boll. Un. Mat. Ital. Ser. VIII, 2004. — Vol. VII-A. — P. 49–76.
7. *Zhikov V. V.* Weighted Sobolev spaces // Sbornik: Mathematics, 1998. — Vol. 189, N 8. — P. 27–58.
8. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev phenomenon // Russian J. Math. Phys., 1994. — Vol. 3, N 2. — P. 249–269.
9. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Homogenization of degenerate elliptic equations // Siberian Math. Journal, 2006. — Vol. 49, N 1. — P. 80–101.

Надійшла до редакції 01.08.2009

УДК 519.6

**НАПІВНЕПЕРЕРВНА ЗНИЗУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ
ВІДОБРАЖЕНЬ, ЯКІ ДІЮТЬ У ЧАСТКОВО
УПОРЯДКОВАНИЙ ЗА КОНУСОМ НОРМОВАНИЙ
ПРОСТІР**

А. В. Довженко

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: anthony3007@rambler.ru*

Запропонована схема напівнеперервної низу регуляризації відображень, які діють у простори, частковий порядок у яких задається конусом із пустою топологічною внутрішністю.

Ключові слова. Частково упорядковані простори, напівнеперервна низу регуляризація, порядкові конуси з пустою внутрішністю.

1. Вступ

Добре відомим фактом теорії варіаційного числення є можливість побудови для довільної дійснозначної функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ її напівнеперервної низу регуляризації виходячи з правила

$$\bar{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

Проте у випадку, коли $f : X \rightarrow Y$ є відображенням, де Y є частково впорядкованим нормованим простором, властивість напівнеперервності можна означити в декількох, загалом, незалежних варіантах. У даній роботі розглядається питання напівнеперервної низу регуляризації відображень $f : X \rightarrow Y$, що означає пошук найбільшого з усіх напівнеперервних низу відображень, які є меншими ніж f .

Ця проблема була частково розв'язана в [4], де авторами запропонована схема напівнеперервної низу регуляризації векторнозначних відображень, яка опирається на поняття границі послідовності множин за Пеневле–Кура-товським, та є зручною для практичного застосування. Проте метод, запропонований в [4], дійсний лише для відображень, які діють у простір, напівупорядкований конусом з не пустою внутрішністю. Ця умова суттєво обмежує клас відображень, які можна регуляризувати. Так, що, наприклад, конуси додатних елементів у більшості лебегових просторів мають пусту внутрішність, проте, що суттєво, їх алгебраїчна внутрішність є не пустою.

У зв'язку з цим, метою даної роботи є дослідження проблеми напівнеперервної низу регуляризації відображень, які діють у простір, напівупорядкований конусом з не пустою алгебраїчною внутрішністю. Умова непустоти алгебраїчної внутрішності є менш обмежливою, ніж непустота внутрішності,

що дозволяє поширити метод запропонований в [4], на більш широкий клас відображень.

2. Основні поняття та попередні результати

У цьому параграфі наведемо ключові поняття та означення, необхідні нам для розгляду статті. В першій частині нагадаємо поняття напівнеперервності знизу відображення, а в другій звернемо увагу на поняття та властивості алгебраїчної внутрішності конуса.

2.1. Поняття напівнеперервності знизу відображення

У даній статті через E та F будемо позначати дійснозначні векторні топологічні простори. Для підмножини S в E чи F , $\text{Int } S$ та $\text{cl } S$ будуть означати відповідно внутрішність та замикання множини S .

Означення 1. Множина $\Lambda \subset F$ називається конусом, якщо

$$\forall \lambda \in \Lambda : \alpha \lambda \in \Lambda, \forall \alpha > 0.$$

Означення 2. Конус $\Lambda \subset F$ називається загостреним, якщо

$$\Lambda \cap -\Lambda = \{0_F\}.$$

Ми будемо розглядати замкнені та загострені конуси. Такий конус Λ породжує частковий порядок в просторі F , який позначається $\preceq_\Lambda$ і означає наступне:

$$y_1 \preceq_\Lambda y_2 \Leftrightarrow y_2 \in y_1 + \Lambda.$$

Під простором $F^\bullet$ будемо розуміти простір $F \cup \{+\infty\}$, де $+\infty$ є найбільшим елементом простору F відносно порядку $\preceq_\Lambda$, а саме: для будь-якого елемента $f \in F : f \not\preceq_\Lambda \{+\infty\}$.

Зауваження 1. Поняття невластного елемента $\{+\infty\}$ у напівупорядкованих просторах є досить неоднозначним. У даній статті будемо дотримуватися такого тлумачення: будемо казати, що послідовність $\{f_n\}_n \subset F$ збігається до $\{+\infty\}$, якщо:

(i) $\{f_n\}_n$ не обмежена за нормою простору F ,

(ii) $\forall b \in F \exists n_0 : b \not\preceq f_n, \forall n > n_0$.

Означення 3. Підмножина A в F називається напрямленою вгору, якщо для будь-яких $a, b \in A$ існує $c \in A$ таке, що $a \preceq_\Lambda c$ та $b \preceq_\Lambda c$.

Напрявлені вниз множини визначаються за подібною схемою.

Нижньою гранню множини A називатимемо елемент $\inf A$, який задовольняє умови:

$$1. \inf A \preceq_\Lambda b, \forall b \in A;$$

2. $c \preceq_{\Lambda} \inf A$, $\forall c \in F$ тоді і тільки тоді, коли $c \preceq_{\Lambda} b$, $\forall b \in A$,

Простір F називається решіткою, якщо для будь-яких елементів $a, b \in F$ існують $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$. І, насамкінець, решітка, в якій будь-яка напрямлена вгору, обмежена зверху непуста множина має точну верхню границю, називається повною векторною решіткою.

Означення 4. Будемо казати, що відображення $g : E \rightarrow E^{\bullet}$ є меншим за відображення $f : E \rightarrow E^{\bullet}$, якщо

$$g(x) \preceq_{\Lambda} f(x), \forall x \in E.$$

Означення 5. Областю визначення відображення $f : E \rightarrow F^{\bullet}$, яка позначається як $\text{Dom } f$, називається множина:

$$\text{Dom } f = \{x \in E \mid f(x) \neq +\infty\}.$$

Означення 6. Різницею множин A і B : $A - B$ називається множина

$$A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}.$$

Наведемо поняття нижньої границі послідовності множин $\{A_n\} \subset F$ у сенсі Пеневле–Куратовського:

$$\liminf_n A_n = \left\{ y \in F : y = \lim_n y_n, \exists n_0 : y_n \in A_n, \forall n \leq n_0 \right\}.$$

Кажуть, що послідовність множин $\{A_n\}$ збігається знизу до множини $A \subset F$ в сенсі Пеневле–Куратовського, якщо

$$A \subset \liminf_n A_n.$$

Нагадаємо тепер відомі поняття напівнеперервності знизу (нн. зн.) та секвенційної нн. зн. векторнозначних відображень.

Означення 7. [5] Відображення $f : E \rightarrow F^{\bullet}$ називається напівнеперервним знизу(нн. зн.) в точці $x_0 \in E$, якщо для будь-якого околу нуля $V \in F$ і довільного $b \in F$, яке задовольняє нерівність $b \preceq_{\Lambda} f(x_0)$, в E існує окіл U точки x_0 такий, що

$$f(U) \subset b + V + C \cup \{+\infty\}. \quad (2.1)$$

Означення 8. [5] Якщо $x_0 \in \text{Dom } f$, то відображення f буде нн. зн. в точці x_0 , тоді і тільки тоді, коли для будь-якого околу нуля $V \in F$ існує такий окіл U точки x_0 , що

$$f(U) \subset f(x_0) + V + C \cup \{+\infty\}. \quad (2.2)$$

Означення 9. [2] Відображення $f : E \rightarrow F^{\bullet}$ називається секвенційно–нн. зн. (ск.–нн. зн.) в точці $x_0 \in E$, якщо для будь-якого $b \in F$, яке задовольняє умові $b \preceq_{\Lambda} f(x_n)$, і для будь-якої послідовності $\{x_n\}_n \subset E$, яка збігається до x_0 , існує послідовність $\{b_n\}_n \subset F$, яка, в свою чергу, збігається до b і кожен її елемент задовольняє нерівності

$$b_n \preceq_{\Lambda} f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Означення 10. [2] Якщо $x_0 \in \text{Dom } f$, то відображення f буде ск.-нн. зн. в точці x_0 , тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_n \subset E$, яка збігається до x_0 , існує відповідна послідовність $\{b_n\}_n \subset F$, яка збігається до $f(x_0)$ і кожен її елемент задовольняє нерівності

$$b_n \preceq_{\Lambda} f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В [2] було доведено, що поняття нн.зн. та секвенційної-нн. зн. є еквівалентними, якщо простори E та F метризовані.

2.2. Алгебраїчна внутрішність конуса та її властивості

Ключовим моментом статті є умова непустоти алгебраїчної внутрішності конуса, який задає частковий порядок в E . У зв'язку з цим наведемо ряд положень, які будуть використані далі та, можливо, становлять самостійний інтерес.

Означення 11. Нехай S — непуста підмножина дійсного лінійного простору E .

1. Множину

$$\text{cor}(S) := \{\bar{x} \in S \mid \forall x \in E \exists \bar{\alpha} > 0 : \bar{x} + \alpha x \in S, \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]\}$$

називають алгебраїчною внутрішністю S .

2. Множину S із властивістю $S = \text{cor}(S)$ називають алгебраїчно відкритою.
3. Множину елементів, яка не належить ані $\text{cor}(S)$, ані $\text{cor}(E \setminus S)$, називають алгебраїчною границею S .
4. Елемент $\bar{x} \in E$ називають лінійно допустимим елементом множини S , якщо існує $x \in S, x \neq \bar{x}$, з властивістю

$$\alpha x + (1 - \alpha) \bar{x} \in S, \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Об'єднання множини S та всіх її допустимих елементів називають алгебраїчним замиканням S і позначають

$$\text{lin}(S) := S \cup \{x \in E \mid x \text{ лінійно допустимий елемент із } S\}.$$

Якщо $S = \text{lin}(S)$, то множину S називають алгебраїчно замкненою.

5. Множину S називають алгебраїчно обмеженою, якщо для будь-якого $\bar{x} \in E$ і будь-якого $x \in E$ існує $\bar{\alpha} > 0$ таке, що

$$\bar{x} + \alpha x \notin S, \quad \forall \alpha \geq \bar{\alpha}.$$

Розглянемо тепер деякі властивості конусів із непустою алгебраїчною внутрішністю.

Лема 1. [3] Для не пустої випуклої множини S дійсного лінійного простору виконуються наступні твердження:

1. $\bar{x} \in \text{cor}(S), \tilde{x} \in \text{lin}(S) \implies \{\alpha \tilde{x} + (1 - \alpha) \bar{x} \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset \text{cor}(S);$
2. $\text{cor}(\text{cor}(S)) = \text{cor}(S);$
3. $\text{cor}(S)$ та $\text{lin}(S)$ є опуклими множинами;
4. $\text{cor}(S) \neq \emptyset \implies \text{lin}(\text{cor}(S)) = \text{lin}(S)$ та $\text{cor}(\text{lin}(S)) = \text{cor}(S).$

Означення 12. Якщо конус $\Lambda \in F$ має непусту алгебраїчну внутрішність, то будемо казати, що елемент $a \in F$ є строго меншим за конусом, ніж елемент $b \in F$, і позначати це як $a \prec_{\Lambda} b$, якщо має місце наступна нерівність

$$b \in a + \text{cor}(\Lambda) \cup \{+\infty\}. \quad (2.3)$$

Лема 2. [3] Нехай Λ — опуклий конус у дійсному лінійному просторі F з не пустою алгебраїчною внутрішністю. Тоді:

1. $\text{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$ — випуклий конус;
2. $\text{cor}(\Lambda) = \Lambda + \text{cor}(\Lambda).$

Зауваження 2. Якщо конус $\Lambda \subset F$ є загостреним та випуклим, а, отже, він породжує частковий порядок на просторі F , і має непусту алгебраїчну внутрішність, то конус $\text{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$, за лемою 2, також породжує частковий порядок на F .

Наведемо тепер необхідні властивості конусів з не пустою алгебраїчною внутрішністю. Нехай Λ — замкнений, випуклий та загострений конус. Тоді мають місце наступні результати.

Лема 3. Якщо $\text{cor}(\Lambda) \neq \emptyset$, то знайдеться збіжна до 0_F послідовність $\{y_n\}$ така, що $y_n \succ 0_F$.

Доведення. Внаслідок леми 2, множина $\text{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$ є опуклим конусом. За означенням опуклості множини. Це означає, що для будь-яких двох елементів a, b відрізок, що їх з'єднує:

$$[a, b] = \{\alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

З цього випливає, що, обравши довільний елемент y з $\text{cor}(\Lambda)$, можна стверджувати, що відрізок $[0_F, y]$ належить конусу $\text{cor}(\Lambda) \cup \{0_F\}$. Більше того, $(0_F, y] \in \text{cor}(\Lambda)$. А тому, побудувавши послідовність

$$y_n = \frac{1}{n} \cdot y, n \in \mathbb{N},$$

легко бачити, що вона збігається до 0_F та не належить до $\text{cor}(\Lambda)$, що і доводить лему. $\square$

Наслідок 1. Для довільного $y \in \Lambda$, знайдеться послідовність $\{y_n\}_n$ така, що

$$y_n \rightarrow y, y_n \succ_{\Lambda} y.$$

Наслідок 2. Для довільного $y \in -\Lambda$, знайдеться послідовність $\{y_n\}_n$ така, що

$$y_n \rightarrow y, \quad y_n \prec_{\Lambda} y.$$

Наслідки 1 і 2 доводяться за допомогою паралельного переносу точки $y \in F$ в 0_F , після чого застосовується результат леми 3.

Лема 4. Якщо $\text{cor}(\Lambda) \neq \emptyset$, то

$$\Lambda \subset \text{cl}(\text{cor}(\Lambda)). \quad (2.4)$$

В разі ж замкнутості конуса Λ

$$\Lambda = \text{cl}(\text{cor}(\Lambda)). \quad (2.5)$$

Доведення. Доведення цієї леми впливає з леми 3. Припустимо, що твердження (2.4) є хибним. Тоді знайдеться елемент $\lambda \in \Lambda$ такий, що

$$\lambda \notin \text{cl}(\text{cor}(\Lambda)).$$

Проте, це суперечить тому, що для довільного $\lambda \in \Lambda$ знайдеться збіжна до нього послідовність $\{\lambda_n\}_n$, така, що $\lambda_n \succ_{\Lambda} \lambda$. Інакше, за властивістю $\text{cor}(\Lambda) = \Lambda + \text{cor}(\Lambda)$ (див. лему 2), отримаємо $\{\lambda_n\}_n \in \text{cor}(\Lambda)$, а, отже, її границя повинна належати замиканню алгебраїчної внутрішності конуса.

З іншого боку, зрозуміло, що у разі, коли конус Λ є замкненим, то замикання його алгебраїчної внутрішності буде належати самому конусу, з чого випливає (2.5). $\square$

Зазначимо, що у випадку скінченновимірності простору E , поняття внутрішності та алгебраїчної внутрішності співпадають. Проте у нескінченновимірних просторах такої рівності, як правило, не існує.

3. Поняття множини нижнього рівня та її властивості

У цьому параграфі нагадаємо поняття множини нижнього рівня, введенного в роботі [4], та її зв'язок із властивістю напівнеперервності знизу для векторнозначних відображень.

Означення 13. Нехай f векторнозначне відображення і $x_0 \in \text{Dom } f$. Через $\vartheta(x_0)$ позначимо сім'ю околів точки x_0 . Тоді множина нижнього рівня визначається таким чином:

$$A_{x_0}^f := \{y \in F \mid \forall V \in \vartheta(y), \exists U \in \vartheta(x_0), f(U) \subset V + \Lambda \cup \{+\infty\}\} \quad (3.1)$$

або, в секвенційному варіанті:

$$s-A_{x_0}^f := \{y \in F \mid \forall \{x_n\}_n \rightarrow x_0, \exists \{b_n\}_n \rightarrow y, b_n \preceq_{\Lambda} f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\} \quad (3.2)$$

Нагадаємо зв'язок множини нижнього рівня з поняттям нн. зн., який було показано в роботі [4].

Твердження 1. Нехай f — векторнозначне відображення і $x_0 \in \text{Dom } f$. Тоді,

1. відображення f є ск.-нн. зн. в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0) \in s - A_{x_0}^f$;
2. відображення f є нн. зн. в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0) \in A_{x_0}^f$.

Твердження 2. Якщо простори E та F метризовані, $f : E \rightarrow F^\bullet$, $x_0 \in \text{Dom } f$. То

$$A_{x_0}^f = s - A_{x_0}^f.$$

Надалі будемо розглядати випадок, коли відображення f задане в парі метризованих просторів, тому позначатимемо множину нижнього рівня в секвенційному варіанті як $A_{x_0}^f$.

Наведемо тепер властивості множини нижнього рівня. Нехай задано відображення $f : E \rightarrow F^\bullet$, $x_0 \in \text{Dom } f$. Тоді множина нижнього рівня має такі властивості:

1. $A_{x_0}^f = A_{x_0}^f - \Lambda$;
2. відображення f є нн. зн. в точці $x_0 \iff A_{x_0}^f = f(x_0) - \Lambda$;
3. якщо простір F є банаховою решіткою, то множина нижнього рівня $A_{x_0}^f$ напрямлена вгору.

4. Напівнеперервна знизу регуляризація відображень

У цьому параграфі вивчається питання нн. зн. регуляризації векторнозначних відображень $f : E \rightarrow F^\bullet$, де F — повна векторна решітка, яка напівупорядкована конусом із не пустою алгебраїчною внутрішністю. Зауважимо, що при цьому не робиться жодних припущень щодо непустоти внутрішності конуса.

Нехай для будь-якого $x_0 \in \text{Dom } f$ має місце умова $A_{x_0}^f \neq \emptyset$. Введемо до розгляду таке відображення:

$$I_f(x_0) := \sup A_{x_0}^f. \quad (4.1)$$

Зауважимо: з того, що F є повною векторною решіткою, а A_x^f — обмежена зверху множина, випливає, що відображення I_f є означеним для кожної точки $x \in \text{Dom } f$.

Теорема 1. Нехай F — повна векторна решітка, яка напівупорядкована конусом із не пустою алгебраїчною внутрішністю. Тоді відображення I_f є нн. зн. для кожного x з $\text{Dom } f$. Більше того, I_f є найбільшим з нн. зн. відображень, які не перевищують f , а, отже, I_f є нн. зн. регуляризацією відображення f .

Доведення теореми розіб'ємо на декілька кроків. Кожен наступний результат будемо записувати у вигляді окремої леми.

Лема 5. Для будь-якого опуклого конуса $\Lambda \in F$

$$(F \setminus \Lambda) - \Lambda = F \setminus \Lambda. \quad (4.2)$$

Лема 6. [4] Значення відображення I_f в точці x_0 належить замиканню $\text{cl } A_{x_0}^f$

Доведення. Внаслідок леми 4, достатньо довести, що для усіх $\mu \in \text{cor}(\Lambda)$ має місце подання

$$I_f(x_0) - \mu = \text{cl } A_{x_0}^f. \quad (4.3)$$

□

Лема 7. [4] Для будь-якого елемента $y_0 \in A_{x_0}^f$, такого, що $y_0 \prec_\Lambda I_f(x_0)$ існує послідовність $\{\beta_k\}_k \subset \text{cl } A_{x_0}^f$, для якої виконується така умова:

$$\beta_k \rightarrow I_f(x_0), \quad y_0 \prec_\Lambda \beta_k, \quad \forall k. \quad (4.4)$$

Доведення. Для довільного $k > 0$, нехай

$$\beta_k = I_f(x_0) - \frac{1}{k} (I_f(x_0) - y_0). \quad (4.5)$$

Внаслідок твердження 2 в лемі 2, маємо:

$$\beta_k - y_0 = \frac{k-1}{k} (I_f(x_0) - y_0) \in \text{cor}(\Lambda),$$

з чого випливає, що

$$y_0 \prec_\Lambda \beta_k, \quad \forall k.$$

З іншого боку, лема 6 гарантує, що

$$I_f(x_0) \in \text{cl } A_{x_0}^f.$$

Тому, за побудовою послідовності $\{\beta_k\}_k$ зрозуміло, що вона належить до $\text{cl } A_{x_0}^f$ та збігається до елемента $I_f(x_0)$, що і доводить лему. □

Зауважимо, що для довільного $x_0 \in \text{Dom } f$ мають місце співвідношення

$$\text{cl } E_f(x_0) = H_f(x_0), \quad A_{x_0}^f \subset \text{cl } E_f(x_0) = H_f(x_0) = \text{cl } A_{x_0}^f,$$

де відповідні множини означені як

$$E_f(x_0) := \left\{ y \in A_{x_0}^f \mid y \prec_\Lambda I_f(x_0) \right\}, \quad H_f(x_0) := \left\{ y \in \text{cl } A_{x_0}^f \mid y \preceq_\Lambda I_f(x_0) \right\}.$$

Лема 8. [4] Має місце тотожність $\text{cl } E_f(x_0) = H_f(x_0)$.

Як випливає з леми 8, виконується співвідношення:

$$A_{x_0}^f \subset \text{cl } E_f(x_0) = H_f(x_0) = \text{cl } A_{x_0}^f. \quad (4.6)$$

Тепер доведемо лему, яка відіграє основну роль у доведенні напівнеперервності знизу відображення $I_f(x_0)$.

Лема 9. Для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_k\}_k$, відповідна послідовність $A_{x_k}^f$ має своєю нижньою границею за Пеневле–Куратовським множини $A_{x_0}^f$.

Доведення. Необхідно довести, що за умов леми $A_{x_0}^f \subset \liminf_k A_{x_k}^f$. Для цього достатньо довести, що

$$E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f. \quad (4.7)$$

Нехай $y_0 \in E_f(x_0)$. Покажемо, що

$$y_0 \in \liminf_k A_{x_k}^f.$$

Зрозуміло, що $y_0 \prec_\Lambda I_f(x_0)$. Нехай послідовність $\{\beta_k\}_k \subset \text{cl } A_{x_0}^f$ задовольняє умовам леми 7, а саме $\beta_k \rightarrow I_f(x_0)$ і

$$y_0 \prec_\Lambda I_f(x_0), \forall k > 0. \quad (4.8)$$

Виберемо довільну послідовність $y_k \rightarrow y_0$ так, щоби $y_k \preceq_\Lambda y_0, \forall k > 0$. Покажемо наступне:

$$\exists \delta_0 : \forall k > 0, y_k \preceq_\Lambda f(x) \forall x \in B(x_0, \delta_0). \quad (4.9)$$

Припустимо, що це не так. Отже, для будь-якого $\delta > 0$, існує $k > 0$ і $x_\delta \in B(x_0, \delta)$ таке, що

$$f(x_\delta) - y_k \notin \Lambda.$$

Інакше кажучи, маємо співвідношення

$$\begin{aligned} f(x_\delta) - y_0 &\in y_k - y_0 + F \setminus \Lambda \\ &\in -\Lambda + F \setminus \Lambda = F \setminus \Lambda. \end{aligned}$$

Отже, можна побудувати послідовність $\omega_n \rightarrow x_0$ таку, що

$$f(\omega_n) - y_0 \in F \setminus \Lambda, \forall n. \quad (4.10)$$

Зафіксуємо довільне число $k_0 > 0$. Через те, що $\beta_{k_0} \in \text{cl } A_{x_0}^f$, існує послідовність $\{\gamma_m\}_m = \{\gamma_m(k_0)\}_m$ така, що

$$\gamma_m \rightarrow \beta_{k_0},$$

де $\gamma_m \in A_{x_0}^f$. Тоді з означення множини нижнього рівня випливає, що існує послідовність $\{p_n\}_n := \{p_n(k_0, m)\}_n$, яка збігається до γ_m і для будь-якого n задовольняє включенню:

$$-f(\omega_n) + p_n \in -\Lambda \quad (4.11)$$

З (4.10), (4.11) та леми 5 випливає

$$p_n - y_0 \in (F \setminus \Lambda) - \Lambda = F \setminus \Lambda. \quad (4.12)$$

Тоді,

$$p_n - y_0 \notin \text{cor } \Lambda. \quad (4.13)$$

Переходячи до границі у (4.13), ми отримаємо

$$\gamma_m - y_0 \notin \operatorname{cor} \Lambda. \quad (4.14)$$

У той же час, граничний перехід в (4.14) дає

$$\beta_{k_0} - y_0 \notin \operatorname{cor} \Lambda, \quad (4.15)$$

що суперечить (4.8). А це означає, що (4.9) є правильним.

Тепер, використовуючи (4.9) покажемо, що $y_k \in A_{x_k}^f$. Для кожного k побудуємо послідовності $\{x_k^n\}_n \rightarrow x_k$. Тоді знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$x_k^n \in B\left(x_k, \frac{\delta_0}{2}\right) \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{і} \quad \forall k > n_0.$$

Нехай $\{z_k^n\}_n$ — довільна послідовність, яка збігається до y_k і при цьому $z_k^n \preceq_C y_k$. Нехай також

$$y_k^n = \begin{cases} z_k^n, & n \geq n_0 \\ f(x_k^n), & n < n_0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Вважаючи, що $x_k \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right) \quad \forall k \geq n_0$, маємо $x_k^n \in B(x_0, \delta_0) \quad \forall k, n \geq n_0$.

Звідки, в силу (4.9), отримуємо $y_k^n \preceq_C f(x_k^n) \quad \forall k, n \geq n_0$. Отже, $y_k \in A_{x_k}^f \quad \forall k \geq n_0$. Таким чином, $y \in \liminf_k A_{x_k}^f$, з чого випливає

$$E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f.$$

Оскільки $\liminf_k A_{x_k}^f$ є замкнутою множиною, то $\operatorname{cl} E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f$. В результаті $A_{x_0}^f \subset \liminf_k A_{x_k}^f$, що і потрібно було встановити. $\square$

Враховуючи результати, отримані в наведених лемах, доведемо тепер теорему 1. Розіб'ємо доведення на два етапи. На першому покажемо, що відображення $I_f(x)$ є нн. зн. на $\operatorname{Dom} f$. На другому етапі — що $I_f(x)$ є найбільшим серед усіх нн. зн. відображень, які є меншими за f .

Доведення. 1) Нехай $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ та послідовність $\{x_n\}_n$ збігається до x_0 . Внаслідок леми 6 існує така послідовність $\{y_k\} \in A_{x_0}^f$, яка збігається до $I_f(x_0)$. З леми 9 випливає, що $y_k \in \liminf_n A_{x_n}^f$. В кожній множині $A_{x_n}^f$ виберемо послідовність $\{y_k^n\}_n$, яка збігається до y_n , коли $n \rightarrow +\infty$. Тоді, за лемою 9 маємо: $\{y_k^n\}_n$ збігається до y_k рівномірно. Більше того, враховуючи власності внутрішності конуса, які викладено в параграфі 1.2, елементи послідовності $\{y_k^n\}_n$ можна подати таким чином:

$$y_k^n = y_k - \nu_n, \quad \nu_n \in \operatorname{cor} \Lambda, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n = 0_F. \quad (4.17)$$

Зрозуміло, що

$$y_k^n \preceq_\Lambda \sup A_{x_n}^f = I_f(x_n). \quad (4.18)$$

Ясно, що (4.18) має місце для довільних k . Тому візьмемо відображення $k(n)$ таким, що $k(n) \rightarrow +\infty$. Тоді побудуємо послідовність

$$b_n = f_{k(n)}^n. \quad (4.19)$$

Ця послідовність збігається до $I_f(x_0)$, задяки рівномірній збіжності y_k^n до y_k і задовільняє нерівності

$$b_n \preceq_{\Lambda} I_f(x_n). \quad (4.20)$$

А, отже, для будь-якої збіжної до x_0 послідовності x_n , знайдено відповідну послідовність $b_n \in F$ таку, що $b_n \preceq_{\Lambda} I_f(x_n)$ і $b_n \rightarrow I_f(x_0)$. Отже, відображення $I_f(x)$ є нн. зн. в точці x_0 .

2) Нехай $g : E \rightarrow F^{\bullet}$ — довільне нн. зн. відображення, яке є меншим за f . За побудовою множини нижнього рівня зрозуміло, що з нерівності

$$g(x) \preceq_{\Lambda} f(x), \quad \forall x \in E$$

маємо

$$A_f(x) \supseteq A_g(x) \Rightarrow \sup A_f(x) \succeq_{\Lambda} \sup A_g(x). \quad (4.21)$$

Відомо, що $I_f(x) = \sup A_f(x)$, і при цьому $g(x) = \sup A_g(x)$, оскільки відображення g є нн. зн. З цього випливає, що

$$I_f(x) \succeq_{\Lambda} g(x).$$

Унаслідок довільності вибору відображення g , побудоване відображення $I_f(x)$ є найбільшим серед усіх нн. зн. відображень, які є меншими за f . Таким чином, це відображення є нн. зн. регуляризацією для f . $\square$

5. Приклад напівнеперервної знизу регуляризації

Для ілюстрації наведеного в роботі методу розглянемо відображення, яке не є нн. зн. в області свого визначення, та залучимо до нього запропоновану вище регуляризацію. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow l_2$, де простір l_2 наділимо *-слабкою топологією. Нехай простір l_2 напівупорядковано конусом невід'ємних елементів

$$l_2^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2 \mid x_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Нехай

$$f(x) = \begin{cases} (x, x+1, 0, \dots) & x \neq 1, \\ (0, 3, 0, \dots, 0) & x = 1. \end{cases}$$

Відображення f є неперервним, а тому і нн. зн., всюди окрім точки $x_0 = 1$. У точці $x_0 = 1$, f не є нн. зн., оскільки для послідовності $\{\frac{n-1}{n}\}_n$ не існує відповідної послідовності $\{b_n\}$, яка б збігалася до елемента $f(1) = (0, 3, 0, \dots)$ і одночасно

$$b_n \preceq_{l_2^+} \left(\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n}, 0, \dots \right).$$

У зв'язку з цим побудуємо множину нижнього рівня для відображення f в точці $x_0 = 1$.

$$A_1^f := \{y \in F \mid \forall \{x_n\}_n \rightarrow 1, \exists \{b_n\}_n \rightarrow y, b_n \preceq_\Lambda f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Характерними для цього випадку будуть два типи послідовностей:

1. $x_n = 1$. В цьому випадку $f(x_n) = (0, 3, 0, \dots)$. З чого випливає, що A_1^f не може містити елементів, які не є меншими за $(0, 3, 0, \dots)$.
2. Для всіх інших послідовностей, що збігаються до $x_0 = 1$, відповідна границя послідовностей $\{f_{x_n}\}$ буде дорівнювати $(1, 2, 0, \dots)$. Враховуючи, що в усіх точках, окрім точки 1, відображення неперервне, легко бачити, що A_1^f не містить елементів, які не є меншими за $(1, 2, 0, \dots)$.

Враховуючи це та схему побудови множини нижнього рівня, легко бачити, що A_1^f включає лише ті елементи, які одночасно менші ніж $(1, 2, 0, \dots)$ та $(0, 3, 0, \dots)$. Отже, A_1^f містить лише ті елементи, які є меншими за

$$\inf \{(1, 2, 0, \dots), (0, 3, 0, \dots)\} = (0, 2, 0, \dots).$$

Таким чином, множина A_1^f має вигляд:

$$A_1^f = (0, 2, 0, \dots) - l_2^+.$$

Тобто, регуляризація відображення f в точці 1 має вигляд:

$$I_f(1) = \sup A_1^f = \sup ((0, 2, 0, \dots) - l_2^+) = (0, 2, 0, \dots),$$

в той час, як на усьому просторі дійсних чисел її можна подати у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} (x, x+1, 0, \dots) & x \neq 1, \\ (0, 2, 0, \dots) & x = 1. \end{cases}$$

6. Висновки

Таким чином, метод напівнеперервної знизу регуляризації, запропонований у роботі [4], можна поширити на клас відображень, які діють у просторі, що є напівупорядкованими за конусами з можливо пустою топологічною внутрішністю.

Бібліографічні посилання

1. Довженко А. В. Квазі-напівнеперервна знизу регуляризація відображень в банахових просторах // А. В. Довженко, П. І. Когут // Вісник ДНУ, Сер. Математика, 2009. — Т. 18, № 2. — С. 62–75.
2. Combari, C., Laghdir, M. et Thibault Sous-differentiel de fonctions convexes composes // Ann. Sci. Math. Quebec, 1994. — Vol. 18, № 2. — P. 119–148.
3. Jahn Johannes Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
4. Mansour M. A., Metrane A., Thera M. Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings // Rapport de recherche, Université de Limoges, 2004.
5. Penot, J-P. et Thera, M. Semi-continuous mappings in general topology // Archiv der Math, 1982. — Vol. 38, — P. 158–166.

Надійшла до редакції 01.09.2009

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ВНУТРІШНЬОМУ НАРОЩУВАННІ

А. В. Сяєв*, І. В. Щербина**

* *Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. E-mail: syasev@i.ua*

** *Національна металургійна академія України, Дніпропетровськ 49050.*

Розглядається задача про напружено-деформований стан (НДС) в'язкопружного пустотілого циліндра, який нарощується під дією внутрішнього тиску. Припускається, що процес неперервного нарощування має місце зі сторони внутрішнього радіуса. Розглянуто частинний випадок лінійного закону повзучості, а також наведено результати розрахунків, які показують динаміку напружень та деформацій, що при цьому виникають.

Ключові слова. В'язкопружний циліндр, внутрішнє нарощування, модель процесу нарощування.

1. Вступ

Процес розвитку нових технологій у виробництві оболонок, труб та інших деталей обертання шляхом нарощування вимагає розвитку відповідних методів розрахунку, які б враховували механічні властивості матеріалу, з якого готується та або інша деталь. Відомо, наприклад, що полімери, а останнім часом і деякі метали, які часто залучаються для виготовлення труб методом відцентрового лиття [5], мають чітко виражені властивості повзучості. Зазвичай ця обставина призводить до перерозподілу напружень у деталі (трубі) при її нарощуванні, зміні форми і розмірів, а також при її подальшому навантажуванні. В цьому випадку залучення теорії в'язкопружності дозволяє здійснити теоретичну оцінку цих чинників і пропонувати такі технології нарощування, які б відповідали основним вимогам до готової продукції.

У зв'язку з цим доречно зауважити, що в роботі [4], при дослідженні задачі про нарощування циліндра, основна увага приділяється оцінці релаксації залишкових напружень. Разом із тим, метою даної роботи є дослідження впливу часу нарощування на розподіл напружень у в'язкопружному порожнистому циліндрі.

2. Фізична постановка задачі

При побудові математичної моделі нарощування в'язкопружного пустотілого циліндра, який нарощується під дією внутрішнього тиску, скористаємося підходом, який наведено в [4]. Нехай є заданим порожнистий однорідний

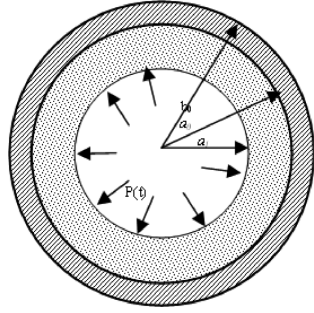


Рис. 1. Схема внутрішнього нарощування

в'язкопружний круговий циліндр, для якого на момент часу $t = 0$ є відомими його внутрішній a_0 та зовнішній b_0 радіуси (див. рис. 1). Процес нарощування даного циліндра полягає в його потовщенні з середини однорідним в'язкопружним матеріалом під дією внутрішнього тиску $P(t)$. Будемо розглядати цей процес на інтервалі часу $[0, T]$ і дотримуватися таких припущень:

1. на момент часу $t = 0$ є заданим початкове значення тиску $P(0) = P_0$;
2. є відомим закон $a = a(t)$, за яким міняється в часі внутрішній радіус циліндра;
3. функція $a = a(t)$ є монотонно спадною і такою, що $a(0) = a_0$;
4. функції $a(t)$ і $P(t)$ неперервно диференційовані на інтервалі $0 < t < T$;
5. процес нарощування припиняється при $t = T$, що означає $a(t) = a_1 = \text{const}$ при $t \geq T$.

Задача полягає в ідентифікації напружено-деформованого стану циліндра при кожному значенні $t \in [0, T]$.

3. Математична модель та її аналіз

Уведемо полярні координати r, θ, z і розглянемо плоску деформацію циліндра (тобто $u_z = 0$). Надалі будемо користуватися загальноприйнятими позначеннями для переміщень, компонент тензора напружень і деформацій. Запишемо основні співвідношення, які характеризують процес нарощування в поставленій задачі:

- умова спільності деформацій:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0; \quad (3.1)$$

- рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}; \quad (3.2)$$

- співвідношення Коші для швидкостей деформацій і переміщень:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}. \quad (3.3)$$

Тут точкою позначена частинна похідна за часом.

Оскільки всі компоненти тензора деформації, окрім ε_r і ε_θ , дорівнюють нулю, то з урахуванням співвідношення (3.1), маємо:

$$\varepsilon_u = (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2} = 2|\varepsilon_r| = 2|\varepsilon_\theta|.$$

Тоді, враховуючи визначальні рівняння нелінійної теорії повзучості для неоднорідно-старіючих тіл (див., напр., [2]) та умову $\varepsilon_\theta > 0$, рівняння стану можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = & 2G_1(t - \tau^*) (\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r)) \varepsilon_\theta^{m-1}(t, r) - \\ & - \int_{\tau^*}^t R_1(t - \tau^*, \tau - \tau^*) (\varepsilon_r(\tau, r) - \varepsilon_\theta(\tau, r)) \varepsilon_\theta^{m-1}(\tau, r) d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тут позначено $G_1 = G \cdot 2^{m-1}$, $R_1 = R \cdot 2^{m-1}$, а функція $\tau^* = \tau^*(r)$ дорівнює нулю при $a_0 \leq r \leq b_0$ і збігається з функцією, яка обернена до функції $a(t)$, при $a_1 \leq r \leq a_0$.

Граничні умови при цьому мають вигляд:

$$\sigma_r|_{r=b_0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=a(t), 0 \leq t < T} = -P(t), \quad (3.5)$$

$$\sigma_\alpha|_{r=a_1, t \geq T} = 0, \quad \alpha = r, \theta. \quad (3.6)$$

Диференціюючи співвідношення (3.1) за часом і підставивши в отриманий результат подання (3.3), прийдемо до наступного рівняння:

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} = 0.$$

Звідси

$$\dot{u}_r = \frac{c(t)}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{c(t)}{r^2}, \quad (3.7)$$

де $c(t)$ — деяка функція, що підлягає визначенню.

З рівнянь (3.7) з урахуванням початкової умови $u_r(\tau^*(r), r) = \varepsilon_\theta(\tau^*(r), r) = 0$ отримуємо наступну сукупність співвідношень:

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad (3.8)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r^2} \quad \text{при} \quad a(t) \leq r < a_0, \quad (3.9)$$

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad (3.10)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2 \quad \text{при} \quad a_0 \leq r \leq b_0, \quad (3.11)$$

$$A(t) = - \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Оскільки область інтегрування в (3.12) включає точку $t = 0$, позначивши сингулярну складову функції $c(t)$ через $c_0\delta(t)$, з'ясовуємо, що границя функції $A(t)$ у точці $t = 0$ справа дорівнює c_0 .

Тепер пов'яжемо напруження σ_r та функцію $A(t)$ для вихідного циліндра в його області росту. Зробимо це поетапно.

- (а) Розглянемо підобласть $a_0 \leq r \leq b_0$. Підставляючи в (3.4) значення компонент деформації (3.11), одержимо

$$\sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = -\frac{2}{r^{2m}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau) d\tau \right] \quad (3.13)$$

Тоді, після інтегрування рівняння (3.2) в межах від r до b_0 , з урахуванням граничної умови (3.6)) і підстановки в результат подання (3.13), отримуємо:

$$\sigma_r(t, r) = - \int_r^{b_0} \frac{2 dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau) d\tau \right]. \quad (3.14)$$

- (б) Розглянемо підобласть $a(t) \leq r < a_0$. Підставляючи в (3.4) вираз для компонент деформації (3.9), маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = & -\frac{2}{r^{2m}} [2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \\ & - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau] . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тоді, за результатами інтегрування співвідношення (3.2) в межах від $a(t)$ до r з урахуванням граничної умови (3.6), і підстановки отриманого результату в (3.15), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) = & -P(t) + \int_{a(t)}^r \frac{2 dr}{r^{2m+1}} [2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \\ & - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau] . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Після заміни змінної $r = a(s)$ ($s = \tau^*(r)$) у рівнянні (3.16) і зміни порядку інтегрування, маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) = & -P(t) - \left[\int_{\tau^*(r)}^t \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t - \tau)(A(t) - A(\tau))^m d\tau - \right. \\ & \left. - \int_{\tau^*(r)}^t d\tau \int_{\tau^*(r)}^\tau ds R_1(t - s, \tau - s) \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} (A(\tau) - A(s))^m \right] . \end{aligned} \quad (3.17)$$

В результаті рівняння для визначення $A(t)$ впливає з умови неперервності напруження $\sigma_r(t, r)$ на межі поділу двох розглянутих областей, тобто при $r = a_0$. Тобто, підставляючи в (3.14) і (3.17) значення $r = a_0$ і прирівнюючи праві

частини, прийдемо до наступного нелінійного інтегрального визначального співвідношення для функції $A(t)$

$$\begin{aligned} H_1 \left(2G_1(t)A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau)A^m(\tau) d\tau \right) + \\ + \int_0^t H_2(t, \tau) (A(t) - A(\tau))^m d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\tau H_3(t, \tau, s)(A(\tau) - A(s))^m ds d\tau = P(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тут

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{2 dr}{r^{2m+1}}, \quad H_2(t, \tau) = \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t - \tau), \\ H_3(t, \tau, s) &= \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} R_1(t - s, \tau - s). \end{aligned}$$

Таким чином, визначивши функцію $A(t)$ з рівняння (3.18), за формулами (3.8)–(3.11) знаходимо переміщення u_r і компоненти деформацій ε_r та ε_θ , а напруження σ_r і σ_θ можна отримати за формулами (3.13), (3.14), (3.15), (3.17). Для напруження σ_z з умови $\varepsilon_z = 0$ і рівняння стану, за аналогією з [1], [2], маємо:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Тепер розглянемо випадок, коли процес нарощування має місце при лінійному законі повзучості. Для цього досить покласти у наведених вище співвідношеннях $m = 1$. Тоді, виходячи з формул (3.10), (3.11), (3.13), та (3.4), знаходимо:

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) &= \\ &= -\frac{2}{r^2} \left(2G(t)A(t) - \int_0^t R(t, \tau)A(\tau) d\tau \right), \quad \text{при } a_0 \leq r \leq b_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тепер, беручи до уваги (3.8), (3.9), (3.15), та (3.17), одержимо:

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = (A(t) - A(\tau^*(r))) / r^2, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) &= -\frac{2}{r^2} [2G(t - \tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r))) - \\ &- \int_{\tau^*(r)}^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r))) d\tau], \\ &\text{при } a(t) \leq r < a_0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (3.23)$$

$$D_1(t)A(t) - \int_0^t D_2(t, \tau)A(\tau) d\tau = P(t), \quad (3.24)$$

$$D_1(t) = \int_{a(t)}^{b_0} 2G(t - \tau^*(r)) \frac{2|_r dr}{r^3}, \quad (3.25)$$

$$D_2(t, \tau) = \int_{a(\tau)}^{b_0} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3} + \quad (3.26)$$

$$+ \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^3(\tau)} \left(2G(t - \tau) - \int_\tau^t R(t - \tau, s - \tau) ds \right). \quad (3.27)$$

Зауважимо, що рівняння (3.24) отримано з рівняння (3.18). Отже, його розв'язок можна одержати у квадратурах [2, 4].

Припустимо, що ядро релаксації має форму як у роботі [2], тобто:

$$R(t, \tau) = \frac{\partial \mu(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad \mu(t, \tau) = 2G(\tau) - \varphi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}). \quad (3.28)$$

Тоді рівняння (3.24), використовуючи співвідношення (3.28), можна подати у вигляді:

$$A(t)\mu_1(t, t) - \int_0^t \frac{\partial \mu_1(t, \tau)}{\partial \tau} A(\tau) d\tau = P(t), \quad (3.29)$$

де позначено:

$$\mu_1(t, \tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \mu(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3}. \quad (3.30)$$

Підставляючи (3.28) у (3.30), одержимо:

$$\mu_1(t, \tau) = 2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}), \quad (3.31)$$

$$G_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} G(\tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3}, \quad \varphi_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \varphi(\tau - \tau^*(r)) \frac{2 dr}{r^3}. \quad (3.32)$$

Рівняння (3.29) можна звести до диференціального рівняння другого порядку відносно функції $A(t)$ [1], [3]. Дійсно, інтегруючи рівняння (3.29) частинами з урахуванням (3.30) та (3.32), знаходимо:

$$\int_0^t \dot{A}(\tau) \left[2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \right] d\tau = P(t).$$

Диференціюємо останнє рівняння послідовно двічі по t , приходимо до співвідношень

$$2G_2(t)\dot{A}(t) - \int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \dot{P}(t), \quad (3.33)$$

$$2G_2(t)\ddot{A}(t) + 2\dot{G}_2(t)\dot{A}(t) - \gamma\varphi_2(t)\dot{A}(t) + \gamma^2 \int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \ddot{P}(t).$$

Вилучивши із цих співвідношень інтеграл

$$\int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau,$$

одержимо наступне диференціальне рівняння для $A(t)$:

$$2G_2(t) \ddot{A}(t) + \dot{A}(t) [2\dot{G}_2(t) - \gamma \varphi_2(t) + \gamma 2G_2(t)] = \ddot{P}(t) + \gamma \dot{P}(t), \quad (3.34)$$

з початковими умовами, які випливають з (3.29)–(3.33)

$$A(0) = \frac{P(0)}{2G_2(0)}, \quad \dot{A}(0) = \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)}. \quad (3.35)$$

У результаті, розв'язуючи рівняння (3.34) з початковими умовами (3.35), приходимо до наступного співвідношення:

$$A(t) = \frac{P_0}{2G_2(0)} + \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)} \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \int_0^\tau \frac{\ddot{P}(x) + \gamma \dot{P}(x)}{2G_2(x)} e^{\eta(x)} dx, \quad (3.36)$$

де

$$\eta(\tau) = \int_0^\tau \left[\gamma + \left(2\dot{G}_2(z) - \gamma \varphi_2(z) \right) 2G_2^{-1}(z) \right] dz. \quad (3.37)$$

Визначивши функцію $A(t)$ з рівняння (3.36), знаходимо переміщення u_r , компоненти деформацій $\varepsilon_{r,\theta}$, а також напруження за формулами (3.20), (3.23).

Розглянемо тепер випадок, коли функція $\mu(t, \tau)$ має вигляд (3.28), за умови, що

$$G = \text{const}, \quad \varphi(\tau) = 2G(C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}). \quad (3.38)$$

Нехай внутрішній радіус циліндра $a(t)$ міняється за законом

$$\frac{1}{a^2(t)} = \frac{1}{a_0^2} + \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.39)$$

Беручи до уваги співвідношення (3.34) і (3.35), ядро рівняння (3.29), а також ядра інтегральних операторів у (3.20), (3.23) можна виразити через елементарні функції. Нехай внутрішній тиск рівномірно спадає на відрізок $[0, T]$ до значення, яке менше удвічі від початкового, і в момент закінчення нарощування $t = T$, тиск падає до нуля.

На рисунках 2–4 наведено залежності динаміки максимального дотичного напруження і переміщення u_r для наступних точок циліндра 1 — $r = b_0$; 2 — $r = a_0 - 0 = 0,9b_0 - 0$; 3 — $r = 0,79b_0$. При розрахунках параметри C_0, A_0, β, γ і розміри a_0, a_1 вибиралися такими: $C_0 = 0.05, A_0 = 0.75, \beta = 0.02^{-1}, \gamma = 0,1^{-1}, a_0 = 0,9b_0, a_1 = 0,5b_0$. Через те, що напруження не залежать від величини пружноміттевого модуля G , а переміщення і деформації обернено пропорційні йому, у розрахунках приймалося, що $G = 1$.

Як видно з рисунків 3–4, тривалість процесу нарощування впливає як на напружений стан, так і на переміщення точок циліндра. При цьому характер

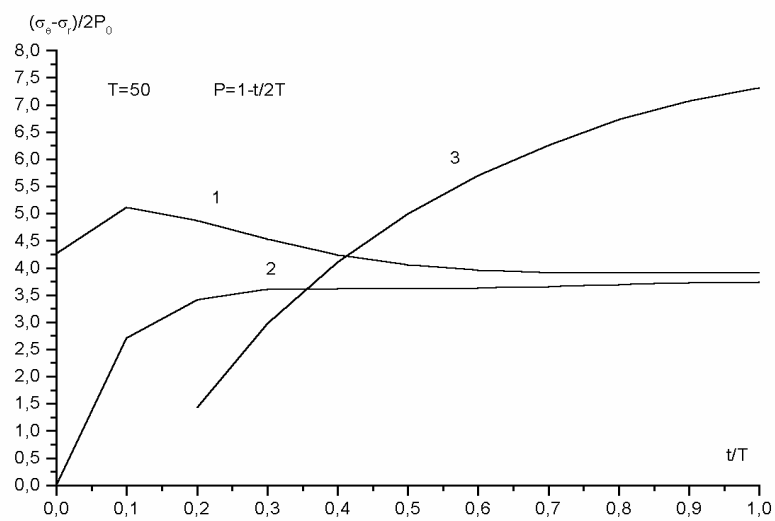


Рис. 2.

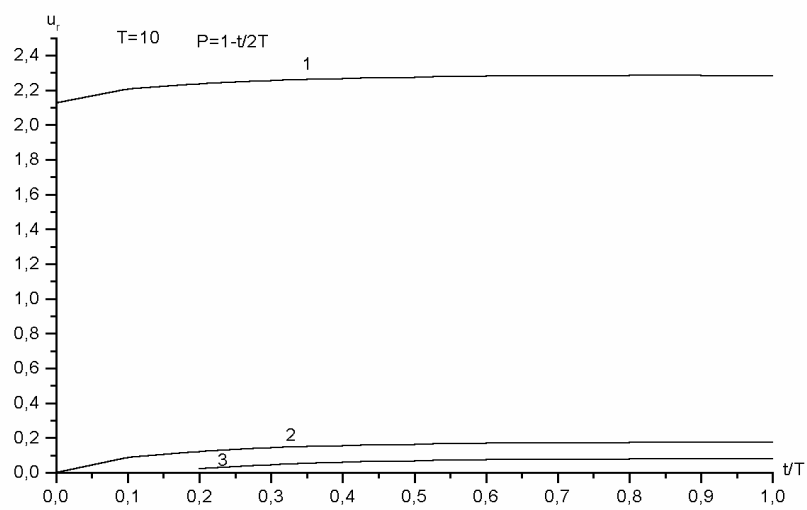


Рис. 3.

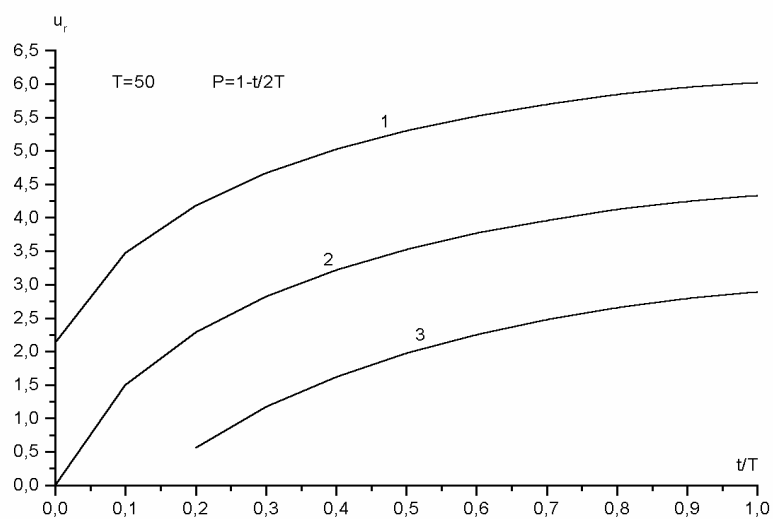


Рис. 4.

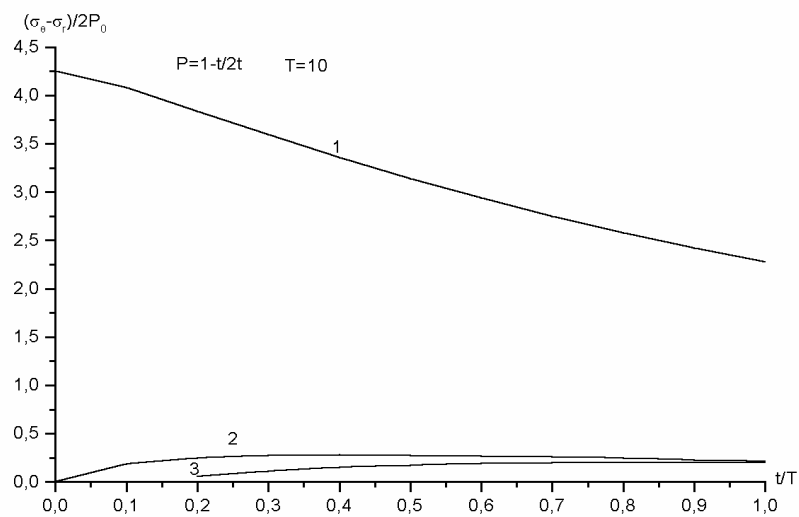


Рис. 5.

кривих змінюється незначним чином, проте мають місце значні зміни у величинах самих напружень і переміщень. Так, наприклад, із рисунків 2–3 видно, що на десяту добу нарощування напруження в точці 1 монотонно спадають, а в точці 2 має місце незначне зростання. На п'ятдесяту добу нарощування картина є зовсім іншою — напруження в другій точці починають значно збільшуватися згодом і за своїми значеннями наближаються до значень у точці 1. Напруження в точці 3 зростають настільки, що починають перевищувати напруження в точках 1 і 2 удвічі. Цей розподіл напружень можна пояснити таким чином: по-перше, точки 2 і 3 увесь час знаходяться ближче до лінії дії навантаження, ніж точка 1, по-друге, при більш швидкому процесі нарощування матеріал не встигає до кінця проявити свої в'язкопружні властивості, що підтверджують і криві для переміщень, показані на рисунках 3–4.

Таким чином, наведений метод розрахунку дозволяє оцінити вплив часу нарощування на розподіл напружень і переміщень у в'язкопружному порожнистому круговому циліндрі, виготовленому з однорідного в'язкопружного матеріалу.

Бібліографічні посилання

1. Арутюнян Н. Х. Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Э. Наумов. — М.: Наука, 1987. — 335 с.
2. Арутюнян Н. Х. Теория ползучести неоднородных тел / Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский. — М.: Наука, 1983. — 289 с.
3. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 360 с.
4. Сясев А. В., Бинкевич Е. В. Нарастивание вязкоупругого полого цилиндра при действии внутреннего давления // А. В. Сясев, Е. В. Бинкевич // Вісник ДДУ. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 153–160.
5. Юдин С. Б. Центробежное литьё. — М.: Наука, 1972. — 380 с.

Надійшла до редакції 01.09.2009

УДК 519:876.2

СИНТЕЗ АДЕКВАТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ОПИСАНИЙ

Ю. Л. Меньшиков

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: Menshikov2003@list.ru*

Рассматриваются алгоритмы построения математических описаний реальных процессов, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений и которые позволяют получать адекватные результаты математического моделирования. Выделяются два основных подхода к проблеме построения таких описаний. В рамках одного из этих подходов предложено несколько алгоритмов. Для получения устойчивых результатов используются методы регуляризации А. Н. Тихонова для уравнений с неточно заданным оператором. Предложены новые задачи и алгоритмы построения адекватных математических описаний.

Ключевые слова. Адекватное описание, некорректные задачи, регуляризация, неточные операторы.

1. Введение

Ограничимся рассмотрением только динамических систем (процессов), которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Отметим, что в данной работе используется терминология, которая немного отличается от общепринятой. Мы будем под математическим описанием динамических систем понимать дифференциальные уравнения, которые устанавливают связь между переменными состояния $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1})^T$, динамической системы (выходами) и внешним воздействием $\tilde{z}$ (входом), $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{m_1})^T$, $(\cdot)^T$ — операция транспонирования. Например, в случае линейной динамической системы эта связь может иметь вид [4]:

$$\dot{\tilde{x}} = C_1 \tilde{x} + D_1 \tilde{z}, \quad (1.1)$$

где C_1, D_1 есть матрицы с постоянными коэффициентами. Предположим, что внешнее воздействие $\tilde{z}$ и часть переменных состояния $\tilde{x}_{r_1+1}, \dots, \tilde{x}_{n_1}$, $r_1 + 1 \leq n_1$ неизвестны. Другая часть переменных состояния в уравнении (1.1) измерена экспериментальным путем, то есть будем полагать, что уравнение наблюдения имеет вид:

$$\tilde{y} = F_1 \tilde{x},$$

где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{l_1})^T$, $F_1 = \{f_{ik}\}_{i=1, k=1}^{i=l_1, k=r_1}$ — матрица с постоянными коэффициентами размером $r_1 \times l_1$. Дополнительно будем полагать для простоты, что матрица F_1 является квадратичной и диагональной, т. е. $f_{ik} = 0$ для $k \neq i$, $r_1 = l_1$.

Определение 1. Математическое описание реального процесса для случая системы (1.1) будем называть *адекватным* по выбранным переменным состояниям $\tilde{x}_j(t), 1 \leq j \leq n_1$, если при выбранных ограничениях на внешние воздействия $z(t)$ и ограничения на значения переменных состояния при некоторых дополнительных равных условиях (начальных и граничных), выбранные переменные состояния математического описания будут совпадать с экспериментальными измерениями соответствующих физических характеристик реального процесса $\tilde{x}_j(t), 1 \leq j \leq n_1$ в данной метрике с точностью экспериментальных измерений и точностью определения параметров математической модели процесса $\tilde{x}_j(t), \tilde{C}, \tilde{D}$.

Будем рассматривать известную переменную состояния $\tilde{x}_j(t)$ как два известных внутренних воздействия $d_j \tilde{x}_j(t)$ и $-[d_j \tilde{x}_j(t)], 1 \leq j \leq r_1, d_j$ — постоянные. Такая интерпретация переменной состояния позволяет упростить исходную систему. Будем называть такое преобразование « j -сечением» исходной системы [1]. Во многих случаях после ряда «сечений» исходная система (1.1) преобразуется в некоторую подсистему, у которой известна одна переменная состояния, например, $\hat{x}_1(t)$, и известны все внешние воздействия $\hat{z}_k(t), k = 2, \dots, m_2$, кроме, например, $\hat{z}_1(t)$. Этот случай сводится к случаю, когда неизвестно только одно внешнее воздействие $\hat{z}_1(t) = z(t)$, благодаря линейности подсистемы. Таким образом, полученная подсистема имеет вид:

$$\dot{\hat{x}} = C\hat{x} + Dz, \quad (1.2)$$

где $\hat{x} = (\hat{x}, \dot{\hat{x}}, \ddot{\hat{x}}, \dots, \hat{x}^{(n-1)})^T, z = (z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(m-1)})^T, C, D$ — матрицы с постоянными коэффициентами. С использованием импульсной переходной функции можно записать равенство:

$$A_p z = \int_0^t K(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t) = B_1 \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in X, \quad (1.3)$$

где $K(t - \tau)$ — известное ядро, A_p — оператор определенной структуры $A_p : Z \rightarrow U; B_1 : X \rightarrow U; X, U, Z$ — некоторые функциональные пространства. Если вернуться к старым переменным состояния, то уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$A_p z = B_p \tilde{x}, \quad (1.4)$$

где B_p — оператор, переводящий элементы $\tilde{x} \in X$ в U .

Если с помощью ряда «сечений» не удастся выделить подсистему (1.2) с одним внешним воздействием, тогда приведенные рассуждения теряют силу.

Если же исходная динамическая система (1.1) имеет несколько неизвестных внешних воздействий и для каждого из них удастся получить подсистемы типа (1.2) с одним неизвестным внешним воздействием, то приведенные выше рассуждения сохраняют силу, однако дальнейшие алгоритмы построения адекватного математического описания существенно усложняются.

2. Постановка задачи

Для успешного применения методов математического моделирования при исследовании динамических систем необходимо выполнить построение математического описания реального процесса, которое позволяет получать результаты математического моделирования, совпадающие с экспериментальными данными (измерениями) [1, 2, 5, 6]. Такого совпадения добиваются путем синтеза «правильной» математической модели движения динамической системы и выбором «хорошей» модели внешнего воздействия на эту систему, если система открытая. Проиллюстрируем сказанное на примере динамической системы с сосредоточенными параметрами. Уравнение (1.4) будем рассматривать как основное. Будем предполагать, что исходные данные $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1})^T$ получены экспериментальным путем с некоторой известной априори погрешностью:

$$\|x_T - \tilde{x}\|_X \leq \delta, \quad (2.1)$$

где x_T — точные исходные данные. Проверка адекватности математического описания (модели динамической системы и модели внешнего воздействия) в данном случае сводится к проверке выполнения неравенства

$$\rho_U(A_p z, B_p \tilde{x}) \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

где $\rho_U(\cdot)$ есть расстояние между элементами функционального пространства U , ε — const, $\varepsilon > 0$, ε — требуемая точность совпадения с экспериментом. Если функциональные пространства являются нормированными, тогда неравенство (2.2) может иметь вид:

$$\|A_p z - B_p x_\delta\|_U \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

Естественно, что ε не может быть меньше величины δ . Характерной чертой для рассматриваемых задач является то, что оператор является компактным [1]. Очевидно, что при выполнении неравенства (2.2) оператор A_p и функция z связаны между собой. Нетрудно показать, что при фиксированном операторе A_p в (2.2) существует бесконечно много различных функций z , которые будут удовлетворять неравенству (2.2) [1, 3]. И наоборот, при некоторой фиксированной функции z существует бесконечно много различных операторов A_p , для которых выполняется (2.2) [3].

Существует два основных подхода к проблеме построения пары (математическая модель поведения процесса и модель внешнего воздействия) [1, 2, 4, 5, 6]:

- 1) по математической модели движения динамической системы выбранной априори структурой и неточными параметрами определяется такая модель внешнего воздействия, при использовании которой выполняется неравенство (2.2);
- 2) по априори заданной модели внешнего воздействия подбирается математическая модель поведения процесса заданной структуры, для которой результаты математического моделирования совпадают с экспериментом с точностью ε .

В силу этого методы идентификации структуры математической модели имеют весьма ограниченную область применения. При выполнении конкретных расчетов следует учитывать, что операторы A_p, B_p зависят от вектора параметров p математической модели движения динамической системы, которые определяются приближенно с некоторой погрешностью. Таким образом, будем полагать, что для нормированных пространств X, U, Z выполняются неравенства:

$$\|A_p - A_T\|_{Z \rightarrow U} \leq h, \quad \|A_p - A_T\|_{X \rightarrow U} \leq d. \quad (2.4)$$

где A_T, B_T – точные операторы в уравнении (1.4), h, d – известные величины.

3. Объективные оценки величины ε

Если величину ε в неравенстве (2.2) выбирать волевым способом, то результаты проверки адекватности не будут субъективными. Поэтому представляет смысл конструировать алгоритмы проверки адекватности, в которых величина ε определяется объективными факторами. Очевидно, что если операторы A_p, B_p не будут изменяться в будущем при математическом моделировании процесса, то в качестве ε можно взять величину $\|B_p\|_{X \rightarrow U} \delta$. Этот вывод следует из оценки

$$\|A_p z_T - B_p x_\delta\|_U = \|B_p x_T - B_p x_\delta\|_U \leq \|x_T - x_\delta\|_X \leq \|B_p\|_{X \rightarrow U} \delta \quad (3.1)$$

где $A_p z_T = B_p x_T$. Если учитывать погрешность операторов A_p, B_p , тогда в неравенстве (2.2) величину ε следует выбирать по иному алгоритму. Будем предполагать, что существуют точные операторы A_T, B_T , удовлетворяющие неравенствам (2.4), для которых выполняется равенство $B_T x_T = u_T = A_T z_T$, где z_T — точное решение уравнения (1.4). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|A_p z_T - u_\delta\|_U &= \|A_T z_T - A_T z_T + A_p z_T - u_\delta\|_U \\ &\leq \|A_p - A_T\| \|z_T\| + \|A_T z_T - u_\delta\|_U \leq h \|z_T\|_Z + \|B_T x_T - u_\delta\|_U \leq \|z_T\|_Z \\ &\quad + \|B_T z_T - B_p z_T\|_U + \|B_p z_T - B_p z_\delta\|_U \leq h \|z_T\|_Z + d \|x_T\|_X + \|B_p\| \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, можно принять

$$\varepsilon = h \|z_T\|_Z + d \|x_T\|_X + \|B_p\| \delta. \quad (3.2)$$

Оценка (3.2) является объективной, но слишком грубой, если учесть, что величины h, d могут быть вычислены только если известны точные операторы A_T, B_T . Кроме того, величина $\|z_T\|_Z$ не является априори известной. Таким образом, оценка (3.2) не является конструктивной. Хотя величина $\|x_T\|_X$ легко оценивается через известные величины $\|x_\delta\|_X$ и δ :

$$\|x_T\|_X \leq \|x_T - x_\delta\|_X + \|x_\delta\|_X \leq \delta + \|x_\delta\|_X.$$

4. Адекватность в нетрадиционных постановках задач

Рассмотрим некоторые нетрадиционные задачи построения адекватного математического описания в рамках первого подхода [1, 4]. Пусть z_p есть решение экстремальной задачи:

$$\Omega[z_p] = \inf_{z \in Q_{\delta,p}} \Omega[z], \quad (4.1)$$

где $\Omega[z]$ — стабилизирующий квазимонотонный функционал [3, 4],

$$Q_{\delta,p} = \{z : \|A_p z - B_p \tilde{x}\|_U \leq \|B_p\| \delta\}.$$

Очевидно, что любая функция из множества $Q_{\delta,p}$, включая $\Omega[z]$, будет удовлетворять условию адекватности (3.1). В работах [1, 4] предложено несколько нетрадиционных постановок задач синтеза адекватного математического описания. Например, рассматривалась следующая задача определения модели внешнего воздействия в рамках первого подхода:

$$\inf_{A_p, B_p} \inf_{z \in Q_{\delta,p}} \Omega[z] = \inf_{A_p, B_p} \Omega[z] = \Omega[z_p^0]. \quad (4.2)$$

В этом случае оценка адекватности будет иметь вид:

$$\inf_{A_p, B_p} \|A_p z_p^0 - B_p \tilde{x}\|_U = \inf_{A_p, B_p} \{\|A_p - A_T\| \|z_p\| + \|A_p z_p - B_p \tilde{x}\|\} \|B^0\|,$$

где $\|B^0\| = \inf_{B_p} \|B_p\|$. При этом использовалась свойство

$$\|A_p z_p - B_p \tilde{x}\| = \|B_p\| \delta$$

регуляризованного решения для квазимонотонных операторов [3]. Для экстремальной задачи

$$\sup_{A_p, B_p} \inf_{z \in Q_{\delta,p}} \Omega[z] = \sup_{A_p, B_p} \Omega[z_p] = \Omega[z_p^1]. \quad (4.3)$$

оценка адекватности имеет вид (2.2) с величиной ε , равной

$$\varepsilon = h \|z_p^0\| + \|B^1\| \delta, \quad (4.4)$$

где $\|B^1\| = \sup_{B_p} \|B_p\|$. Для экстремальной задачи

$$\inf_{A_p, B_p} \|A_p z_p\| = \|A_p^0 z_p^0\| \quad (4.5)$$

оценка адекватности имеет вид (2.2) с величиной ε равной $\varepsilon = \|B^0\| \delta$. Для экстремальной задачи

$$\sup_{A_p, B_p} \|A_p z_p\| = \|A_p^1 z_p^1\| \quad (4.6)$$

оценка адекватности имеет вид (2.2) с величиной ε равной

$$\varepsilon = \|B^1\| \delta. \quad (4.7)$$

Таким образом, для различных алгоритмов синтеза моделей внешних воздействий, которые дают адекватные результаты математического моделирования в рамках первого подхода, существуют различные объективные оценки.

5. Заключение

В работе предложен алгоритм синтеза адекватных математических описаний для детерминированных процессов, поведение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложено определение адекватного математического описания для данного случая. Сформулировано несколько различных постановок задач синтеза адекватного математического описания. Получены объективные оценки адекватности математического описания в рассматриваемых вариантах задач.

Библиографические ссылки

1. *Меньшиков Ю. Л.* О адекватности результатов математического моделирования // Ю. Л. Меньшиков // Сб. тр. конф. Моделирование-2008. — Киев : 2008. — С. 119–124.
2. *Спешашко В. С.* Метод критических дисперсий как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // В. С. Спешашко. // Пробл. управ. и информат. — 2008. — № 1. — С. 8–26.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 365 с.
4. *Menshikov Yu. L.* Identification of Models of External Loads // Proc. of ICINCO 2007. — 2007. — Angers, France. — p. 376–379.
5. *Gubarev V. F.* Method of iterative identification of many-dimensional systems with inexact data. Part 1. Theoretical basises. // In: Problems of Control and Information, 2008, 2, 8–26.
6. *Gukov O. O.* Algorithms of iterative identification of many-dimensional systems. // In: Proc. of XV International Conference on Automatical Control „Automatics –2008”, Sept. 23–26, 2008p.— Odessa: ONMA, 774–777.
7. *Menshikov Yu. L.* Algorithms of construction of adequate mathematical description of dynamic system. // Proceedings MATHMOD 09 Vienna— Full Papers CD Volume, Vienna Univ. of Technology, February, 2009, ISBN 978-3-901608-35-3. — p. 2482–2485.

Надійшла до редакції 28.09.2009

УДК 517.9

**ПРО ІСНУВАННЯ ЕФЕКТИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ
ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКУ
НА МЕРЕЖІ**

Т. А. Божанова

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net*

Розглядається гідродинамічна модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що такий потік є керованим процесом, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Розглянуто випадок, коли цільове відображення діє в лебегів простір і є напівнеперервним зверху на області визначення. Показано, що множина допустимих розв'язків такої задачі є компактною відносно слабкої топології простору $R^K \times L^2(0, T; BV(\Omega))$, та доведено існування ефективних розв'язків розглянутої задачі векторної оптимізації на мережі.

Ключові слова. Транспортний потік на мережі, гідродинамічна модель, векторна оптимізація на мережі, існування ефективних розв'язків.

1. Вступ

На сьогодні проблема керування транспортними потоками на мережах, особливо у великих містах, стає все більш актуальною. Збільшення кількості транспортних засобів призвело до перевантаження міських доріг, багатогодинних заторів, перешкоджання руху пішоходів, забруднення навколишнього середовища тощо. Тому дослідженню та аналізу таких проблем присвячена досить широка література (див. [1, 4, 5, 6, 15]). Зокрема, більшість існуючих результатів, котрі торкаються оптимізаційних задач на транспортних мережах, стосуються знаходження необхідних умов оптимальності та методів побудови оптимальних законів регулювання транспортних потоків зі скалярними показниками вартості (див. [3, 11, 12]).

Основним об'єктом дослідження у даній роботі виступає макроскопічна модель транспортного потоку на мережі. Вважається, що мережа складається із скінченної кількості доріг, які з'єднані між собою певними вузлами (точками сполучення). На кожній окремо взятій дорозі припускається, що рух транспортних засобів підкоряється так званому гідродинамічному закону збереження, який призводить до розгляду нелінійної задачі Коші для рівняння у частинних похідних першого порядку. При цьому факторами керування виступають параметри, які регулюють транспортний потік у вузлах такої мережі.

На відміну від нині існуючих результатів (див., напр., [3, 11, 12]), будемо вважати, що якість керування транспортним потоком на мережі визначається не скалярним відображенням у простір $L^2(\Omega)$, упорядкований за конусом Λ

додатних елементів. За цих припущень покажемо, що поставлена задача векторної оптимізації транспортних потоків на мережі допускає існування так званих ефективних розв'язків поставленої задачі.

2. Основні поняття та позначення

У цьому параграфі наведемо деякі відомі факти, які стосуються функцій з обмеженою варіацією, транспортних мереж, векторнозначних відображень та частково впорядкованих нормованих просторів.

Нехай $J = (a, b)$ ($a < b$) заданий інтервал в R . Розглянемо функцію $f : J \rightarrow R$ таку, що $f \in L^1(J)$. Тоді повною варіацією функції f називають

$$Tot. V_j(f) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| : m \in N, a < x_0 < x_1 < \dots < x_m < b \right\},$$

де $x_j \in J$, $j \in \{0, \dots, m\}$.

Означення 1. Будемо казати, що функція $f \in L^1(J)$ є функцією з обмеженою повною варіацією на J , якщо існує константа K така, що $Tot. V_j \leq K$. Позначимо через $BV(J)$ множину всіх дійсних функцій $f \in L^1(J)$ з обмеженою повною варіацією на J .

Зауважимо, що повна варіація функції f є невід'ємним числом. Якщо $f \in BV(\Omega)$, тоді $f : J \rightarrow R$ обмежена майже скрізь на J . Обернене не вірно.

Є еквівалентними такі твердження (див. [9]):

(i): $f \in BV(\Omega)$;

(ii): $f \in L^1(J)$ та $|Df|(J) := \sup \left\{ \int_J f \varphi' dx : \varphi \in C_0^1(J), |\varphi| \leq 1 \right\} < +\infty$;

(iii): існує послідовність гладких функцій $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(R)$ таких, що

$$f_k \rightarrow f \text{ в } L^1(J) \text{ і } \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_J |f'_k| dx < +\infty,$$

де узагальнена похідна Df — це міра Радона, і $|Df|(J)$ співпадає з повною варіацією функції f на J . Більше того, для функції $f \in BV(J)$ існують правосторонні та лівосторонні границі:

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) ds, \quad f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(s) ds$$

для $\forall x \in [a, b)$ та $\forall x \in (a, b]$, відповідно. І при цьому, $f(x^+) = f(x^-)$, якщо $|Df|(\{x\}) = 0$.

Має місце наступний результат.

Теорема 1. а) Простір $BV(J)$ є простором Банаха відносно норми

$$\|f\|_{BV(J)} = \|f\|_{L^1(J)} + |Df|(J);$$

б) відображення $f \rightarrow |Df|(J)$ є напівніперервним знизу відносно $L^1(J)$ -збіжності, тобто, якщо $f_k \rightarrow f$ у $L^1(J)$, то

$$|Df|(J) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |Df_k|(J);$$

в) якщо $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(J)$ і

$$\sup_{k \in N} \|f_k\|_{BV(J)} < +\infty,$$

то існує підпослідовність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, яка сильно збігається до деякої функції $f \in BV(J)$.

Кажуть, що послідовність функцій $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(J)$ слабо збігається в $BV(J)$ до f (позначають $f_k \rightharpoonup f$), якщо

$$f_k \rightarrow f \text{ в } L^1(J) \text{ і } \sup_{k \in N} |Df_k|(J) < +\infty.$$

При цьому, якщо $f_k \rightharpoonup f$ у $BV(J)$, то $f \in BV(J)$ і $Df_k \rightharpoonup Df$ як міри Радона.

Нехай Θ — це відкрита випукла підмножина простору R^2 і $\mathfrak{F}$ — плоский граф на R^2 .

Означення 2. Будемо казати, що множина $\Omega = \Theta \cap \mathfrak{F}$ є мережею доріг, обмеженою областю Ω , якщо її можна подати у вигляді пари $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де

(а): $\mathcal{I}$ — скінченна сукупність ребер, які відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i]$ в R , $i = 1, \dots, N$;

(б): $\mathcal{J}$ — скінченна кількість вершин, які відповідають вузлам даної мережі.

Кожна вершина J є об'єднанням двох непустих підмножин $Inc(J)$ та $Out(J)$ таких, що:

- (і): кожна вершина $J \in \mathcal{I}$ є внутрішньою точкою Ω ;
- (ii): для $\forall J \neq J' \in \mathcal{J}$ та $Inc(J) \cap Inc(J') = \emptyset$ маємо: $Out(J) \cap Out(J') = \emptyset$;
- (iii): якщо $i \notin Y_{J \subset \mathcal{J} Inc(J)}$, тоді b_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вихідна дорога з мережі), і якщо $i \notin Y_{J \subset \mathcal{J} Out(J)}$, тоді a_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вхідна в мережу дорога). Крім того, ці два випадки взаємно виключні.

Нехай Ω — мережа. Пов'яжемо з цією множиною дійсний простір $L^2(\Omega)$. Надалі, приймаючи позначення $y \in L^2(\Omega)$, вважаємо, що $y = (y_1, \dots, y_N)$ та $y_k \in L^2(I_k)$ для $k = 1, \dots, N$. Вважатимемо, що $L^2(\Omega)$, як топологічний простір, наділений слабкою топологією. Для підмножини $S \subset L^2(\Omega)$ позначимо через $\text{int}_\omega S$ та $\text{cl}_\omega S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Також припустимо, що $L^2(\Omega)$ є частково впорядкованим за конусом додатних елементів Λ , який визначається як:

$$\Lambda = \{f \in L^2(\Omega); f(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Omega\}. \quad (2.1)$$

Тоді для елементів $y, z \in L^2(\Omega)$ будемо записувати $y \leq_\Lambda z$ усякий раз, коли $z \in y + \Lambda$, і $y <_\Lambda z$, якщо $z - y \in \Lambda \setminus \{0\}$. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є незростаючою та використовувати позначення $y_k \downarrow$ усякий раз, коли для всіх $k \in N$ маємо: $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k$. Також будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є обмеженою знизу, якщо існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y^* \leq_\Lambda y_k$ для $\forall k \in N$.

Для того, щоб означити "оптимальні" елементи для підмножини S частково упорядкованого простору $L^2(\Omega)$, скористаємося наступним поняттям:

Означення 3. [13] Елемент $y^* \in S \subset L^2(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини S , якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*$, $y \neq y^*$, тобто

$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S . Введемо два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^2(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють наступні умови:

$$1) -\infty_\Lambda \leq y \leq +\infty_\Lambda, \forall y \in L^2(\Omega); \quad 2) +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\|-\infty_\Lambda\|_{L^2(\Omega)} = +\infty \text{ і } y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty, \forall y \in L^2(\Omega), \forall \lambda \in R_+.$$

Означення 4. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^2(\Omega)$ відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, ω) -супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\omega S$ у випадку, коли ця множина непуста, і E дорівнює $+\infty_\Lambda$ інакше.

Надалі, (Λ, ω) -супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\Lambda, \omega} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\Lambda, \omega} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\omega S), & Max_\Lambda(cl_\omega S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\omega S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ — непуста підмножина банахового простору X та $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ — деяке відображення. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \rightarrow Y^*$ на весь простір X , де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \quad (2.2)$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \rightarrow Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^2(\Omega)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 5. Підмножину $A \in L^2(\Omega)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$$

відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ і позначати $Sup^{\Lambda, \omega}_{x \in X_\partial} I(x)$, якщо A є (Λ, ω) -супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^2(\Omega)$, тобто,

$$Sup^{\Lambda, \omega}_{x \in X_\partial} I(x) = Sup^{\Lambda, \omega} \{I(x) : \forall x \in X_\partial\}.$$

Зауваження 1. Тепер зрозуміло, що якщо $a \in Sup^{\Lambda, \omega}_{x \in X_\partial} I(x)$, то

$$cl_\omega \{I(x) : \forall x \in X_\partial\} \cap (a + \Lambda) = \{a\}$$

за умови, що $Sup^{\Lambda, \omega}_{x \in X_\partial} I(x) = Max_\Lambda[cl_\omega \{I(x) : \forall x \in X_\partial\}]$.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^2(\Omega)$. Позначимо через $L^\omega\{y_k\}$ множину всіх її точок згущення відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$, тобто $y \in L^\omega\{y_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$. Якщо ця множина не обмежена зверху, тобто $\text{Sup}^{\Lambda, \omega} L^\omega\{y_k\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\omega\{y_k\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_\partial$. Тоді для довільного відображення $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ введемо до розгляду наступні множини:

$$L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\omega\{\hat{I}(x_k)\}, \quad (2.3)$$

$$L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) := L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \cap \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x), \quad (2.4)$$

де $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, що $x_k \rightarrow x_0$ відносно σ -топології простору X .

Означення 6. Будемо казати, що підмножина $A \subset L^2(\Omega) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є Λ -нижньою секвенціальною границею відображення $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології добутку $\sigma \times \omega$ простору $X \times L^2(\Omega)$ і використовувати позначення $A = \limsup_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \omega} I(x)$, якщо

$$\limsup_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \omega} I(x) := \begin{cases} L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0), & L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \neq \emptyset, \\ \text{Sup}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0), & L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.5)$$

Зауваження 2. У скалярному випадку ($I : X_\partial \rightarrow R$) множини

$$\text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) \text{ та } \text{Sup}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0)$$

містять тільки один елемент. Тому, якщо $L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \neq \emptyset$, то маємо:

$$\begin{aligned} L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) &= L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \cap \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) = \\ &= \text{Sup}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \cap \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) = \text{Sup}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0). \end{aligned}$$

Отже, в цьому випадку (2.5) дає класичне означення верхньої границі.

3. Модель транспортного потоку

У цьому параграфі наведемо короткий огляд гідродинамічних моделей для транспортних потоків на мережах, використовуючи підхід Coclite, Piccoli [6] (див. [1, 7]). Нехай $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — транспортна мережа, котра налічує строго N доріг. Для $i \in \{1, \dots, N\}$ дорога i відповідає відріzk $[a_i, b_i]$. Позначимо через $\rho_i = \rho_i(t, x)$ щільність машин на дорозі i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$; при цьому максимально можливу щільність на дорозі i , яка відповідає появі затору на даній ділянці мережі, позначимо як $\rho_{\max, i}$. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графа $\mathfrak{F}$, обмеженого областю Ω , а вузли, які з'єднують дороги, — вершинам цього графа. Кількість машин, що проїжджають за одиницю часу є $f(\rho) = \rho v$, де $v(\rho)$ — швидкість машин.

Слід зауважити, що $v(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ . Відповідно до [8, 12] припустимо, що існують функції потоку f_i такі, що для кожної дороги $i \in \{1, \dots, N\}$ виконуються наступні властивості:

$$\begin{cases} f_i \text{ неперервно диференційовні на } [0, \rho_{max, i}], \\ f_i(0) = f_i(\rho_{max, i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго угнуті функції,} \\ \exists \sigma \in (0, \rho_{max, i}) : f'_i(\sigma) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma)f'_i(\rho) < 0, \forall \rho \neq \sigma. \end{cases} \quad (3.1)$$

Як випливає з наведених вище умов, транспортний потік є додатним при значеннях щільності $0 < \rho_i < \rho_{max, i}$. Тут σ_i — оптимальна щільність, при якій транспортний потік досягає свого максимуму, вважається заданою. Таким чином, для довільного $i \in \{1, \dots, N\}$ макроскопічна модель транспортного потоку на дорозі i може бути виражена наступним нелінійним законом збереження (див. [16]):

$$\partial_t \rho_i(t, x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = 0, \quad \forall x \in (a_i, b_i), \quad \forall t \in (0, T], \quad (3.2)$$

$$\rho_i(0, x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall x \in [a_i, b_i] \quad (3.3)$$

з функцією потоку

$$f_i(\rho) = \rho v_i(\rho),$$

де швидкість v_i — неперервно-диференційована спадна функція свого аргумента ρ .

Зауваження 3. Головною особливістю нелінійної системи (3.2)-(3.3) є той факт, що класичний розв'язок може не існувати для деякого $t > 0$, навіть якщо початкові умови є досить гладкими. Окрім цього, така система не є коректною за Адамаром, що означає відсутність неперервної залежності її розв'язків від початкових умов. У зв'язку з цим граничні умови для доріг, що входять та виходять із мережі Ω , повинні бути заданими у сенсі Bardos, LeRoux та Nedeles [3]. Проте для простоти припустимо, що $a_i = -\infty$ та $b_i = +\infty$, якщо $i \notin \cup_{J \in \mathcal{J}} Inc(J)$ та $i \notin \cup_{J \in \mathcal{J}} Out(J)$, відповідно.

Для повноти моделі (3.2)-(3.3) необхідно визначити потік через кожний вузол $J \in \mathcal{J}$ мережі. Для цього у кожному вузлі будемо розглядати так званий розв'язник Рімана (див. [8]), який задовольняє збереженню кількості машин за таким правилом:

(А): у кожному вузлі з розгалуженням вихідних доріг існують конкретні переваги водіїв, унаслідок яких рух транспорту із вхідних у вузол доріг розподіляється по вихідних дорогах пропорційно відповідних перевагах;

(Б): відповідно до правила (А) водії прагнуть максимізувати потік.

Розглянемо вузол J з n вхідними дорогами $I_1, \dots, I_n$ з кінцем b_i у вузлі, де $(i \in \{1, \dots, n\})$, та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ з кінцем a_i у вузлі, де $(i \in \{n+1, \dots, n+m\})$. Тоді, щоб гарантувати збереження кількості машин, які проїжджають через вузол J , введемо наступну умову:

$$\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(t, b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t, a_i)) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall J. \quad (3.4)$$

Це співвідношення ще називають умовою Rankine–Hugoniot у вузлі. Проте виконання цієї умови не є достатнім для визначення єдиного розв'язку системи (3.2) на мережі. Дійсно, нехай $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ є деякий розв'язок у вузлі J , який задовольняє умову (3.4). Це означає, що відповідні задачі Рімана (3.2)–(3.3) мають своїми розв'язками функції ρ_i , котрі на правих кінцях вхідних доріг ($i \leq n$) та на лівих кінцях вихідних із вузла доріг ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$) дорівнюють відповідним значенням $\hat{\rho}_i$. Однак у загальному випадку таке поєднання значень щільності у вузлі може призвести до появи так званих "шочкових" та "розріджених" хвиль, що проходять через нього (див. [11]). Отже, далеко не кожний вибір значень $(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ буде допустимим у вузлах транспортної мережі. Для їх визначення необхідно мати тільки співвідношення (3.4). Необхідно внести ще $n+m-1$ допоміжну умову. Тому у даному випадку розумно скористатися підходом Coclite, Garavello & Piccoli [8] та ввести матрицю розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ таку, що

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)], \quad j \in \{n+1, \dots, n+m\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J), \quad \forall i \neq i', \quad 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким чином, i -й стовпчик матриці A описує розподіл транспортного потоку по вихідних із вузла дорогах. Це означає, що якщо C — кількість машин, які прибувають з дороги I_i у заданий вузол, то $\alpha_{ji}C$ — кількість машин, які пересуваються по вихідній з вузла дорозі I_j . Можна також припустити, що матриця A залежить від часу. Наприклад, у випадку руху машин на міській мережі, переваги водіїв змінюються протягом доби.

З технічної точки зору, на матрицю A необхідно накласти ряд допоміжних умов. Будемо говорити, що матриця A задовольняє гіпотезу (В), якщо має місце таке: нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ канонічний базис в R^n і для довільної підмножини $V \subset R^n$ позначимо через $V^\perp$ — її ортогональне доповнення. Для $\forall i = 1, \dots, n$ визначимо множину $H_i = (e_i)^\perp$, тобто координатну гіперплощину, ортогональну до e_i , та для $\forall j = n+1, \dots, n+m$ нехай $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn}) \in R^n$ і $H_j = \{\alpha_j\}^\perp$. Нехай K — множина індексів $k = (k_1, \dots, k_l)$, $1 \leq l \leq n-1$ таких, що $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq n+m$, і для $\forall k \in K$ виконується рівність $H_k = \bigcup_{h=1}^l H_{k_h}$. Поклавши $1 = (1, \dots, 1) \in R^n$, отримаємо $\forall k \in K$

$$1 \notin H_k^\perp.$$

Зауваження 4. Із умови (В) безпосередньо отримуємо, що $m \geq n$.

Умова (В) не застосовується для вузлів з n вхідними дорогами і однією вихідною. Таким чином, введемо деякі параметри, зміст яких полягає у наступному. За умови, коли не всі машини можуть проїхати через вузол, існує правило, яке у процентному співвідношенні описує кількість машин, що проїжджають з окремої вхідної дороги через вузол даної мережі, а саме:

(Г): припустимо, що не всі машини можуть проїхати на вихідну з вузла дорогу, і нехай C — кількість машин, яким це вдається. Тоді $q_i C$ машин надходить з дороги i , $i = 1, \dots, n$, при цьому $\sum_{i=1}^n q_i = 1$.

Тепер, згідно з теорією [8], введемо поняття розв'язку задачі (3.2) у вузлі $J \in \mathfrak{J}$ та на всій мережі Ω .

Означення 7. Нехай J — вузол з n вхідними дорогами $I_1, \dots, I_n$ з кінцем b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) у вузлі та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ з кінцем a_i ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$). Будемо казати, що

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m}) : \prod_{l=1}^{n+m} ([0, T] \times I_l) \rightarrow R^{n+m},$$

$$\rho(t, \cdot) \in \prod_{l=1}^{n+m} BV(I_l) \text{ для кожного } t \in [0, T]$$

є слабким розв'язком задачі (3.2) відносно матриці $A(J) \in R^{m+n}$ у вузлі J , якщо він є сукупністю функцій $\rho_l : [0, T] \times I_l \rightarrow R$, $l \in \{1, \dots, n+m\}$ таких, що

(i):

$$\sum_{l=1}^{n+m} \left(\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_l \partial_t \varphi_l + f_l(\rho_l) \partial_x \varphi_l) dx dt \right) = 0, \quad (3.7)$$

для довільної гладкої функції φ_l , $l = 1, \dots, n+m$, яка має компактний носій на множині $(0, +\infty) \times (a_l, b_l]$ для $l = 1, \dots, n$ (вхідні дороги) та на множині $(0, +\infty) \times [a_l, b_l)$ для $l = n+1, \dots, n+m$ (вихідні дороги), при цьому

$$\varphi_i(\cdot, b_i) = \varphi_j(\cdot, a_j), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\cdot, b_i) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(\cdot, a_j),$$

$$i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{n+1, \dots, n+m\};$$

$$(ii): f_j(\rho_j(\cdot, a_j+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i-)) \text{ для } \forall j = n+1, \dots, n+m;$$

$$(iii): L(J, A, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i-)) \text{ досягає максимального значення на парі } (A, \rho) \text{ при обмеженнях (i)-(ii)}.$$

Зауваження 5. Перша умова цього означення є, по суті, умовою збереження кількості машин у вузлі. Більше того, формула 3.7 містить у собі умову 3.4, якщо функції ρ_l досить регулярні. Що стосується умов (2)–(3), то вони описують правила (А) та (Б), тобто переваги водіїв у вузлах мережі.

Відомо, що задача Рімана (3.2)–(3.3) із заданими умовами $\bar{\rho}_i : [a_i, b_i] \rightarrow R$ має розв'язок на всій мережі Ω у такому сенсі (див. [8]).

Означення 8. Нехай задано функції $\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Будемо казати, що сукупність функцій $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^N ([0, T] \times I_i) \rightarrow R^N$, де

$$\rho_i \in C([0, T]; L_{loc}^1(I_i)), \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

є допустимим розв'язком задачі (3.2)-(3.5), якщо:

- (а): $\rho_i : [0, T] \times I_i \rightarrow R$ є слабким ентропійним розв'язком задачі (3.2) на I_i , тобто

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i) \partial_x \varphi) dx dt = 0, \quad (3.8)$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\varphi}) dx dt \geq 0 \quad (3.9)$$

для довільної гладкої функції $\varphi : [0, T] \times I_i \rightarrow R$ з компактним носієм на множині $(0, T) \times (a_i, b_i)$ для $k \in R$ та для довільної гладкої додатної функції $\tilde{\varphi} : [0, T] \times I_i \rightarrow R$ з компактним носієм на $(0, T) \times (a_i, b_i)$;

- (б): $\rho_i(0, \cdot) = \bar{\rho}_i$ на I_i для $\forall i \in \{1, \dots, N\}$;

- (в): у кожному вузлі J сукупність функцій $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$ є слабким розв'язком задачі (3.2) відносно матриці $A(J) \in R^{n+m}$ у сенсі означення 7.

Зауваження 6. Як показано у [8], за наявності точок розриву у початкових умовах $\bar{\rho}_i(\cdot)$ на дорозі I_i , лише одного рівняння Rankine–Hugoniot 3.4 не достатньо для того, щоб відокремити єдиний розв'язок задачі Коші (3.2)–(3.3). Тому поняття слабого розв'язку задачі потрібно доповнити додатковими умовами. За такий допустимий критерій, узятий із фізичних міркувань, можна прийняти так звану ентропійну умову, котра у цьому випадку набуває вигляду ентропійної допустимої умови Кружкова 3.9 (див. [14]).

Означення 9. Нехай $J \in \mathcal{J}$ — вузол мережі $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, який має тільки дві вхідні дороги та дві вихідні. Тому, згідно з [8], будемо казати, що матриця $A(J)$, яка у цьому випадку набуває вигляду:

$$A(J) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 - \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

задовольняє гіпотезу (В), якщо $\alpha, \beta \in (0, 1)$ та $\alpha \neq \beta$.

Зауваження 7. Гіпотеза (В) є винятково технічною умовою, яка необхідна для виділення єдиного розв'язку з відповідних розв'язків задачі Рімана у вузлах. Проте, якщо один із параметрів α або β у виразі (3.10) набуває значення з множини $\{0, 1\}$, то відповідний вузол J має одну вхідну дорогу та дві вихідні. Тому, в цьому випадку, є сенс внести незначні зміни в дану мережу та, відповідно, у задачу (3.2)-(3.5).

Беручи це до уваги, дамо наступний відомий результат стосовно існування та єдиності розв'язку задачі Коші (3.2)-(3.4) (див. [6, 8, 10]).

Теорема 2. Нехай дано мережу $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ та сукупність функцій потоку $\{f_i : R \rightarrow R\}_{i=1}^N$, які задовольняють властивості (3.1), і нехай задано початковий розподіл щільності потоку машин $\bar{\rho} = \{\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)\}_{i=1}^N$. Припустимо, що мережа доріг $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ складається із вузлів, котрі мають не більше двох вхідних та двох вихідних доріг, і кожна їх матриця розподілу руху $A(J)$ належить класу (B). Тоді існує єдиний допустимий розв'язок $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^N ([0, T] \times I_i) \rightarrow R^N$ задачі (3.2)-(3.5) такий, що

$$\rho_i \in C([0, T]; L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.11)$$

$$Tot. V_{I_i}(\rho_i(t, \cdot)) \leq Tot. V_{I_i}(\bar{\rho}_i), \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.12)$$

4. Постановка задачі векторної оптимізації

Оскільки транспортний потік на мережі надає можливість залучення факторів керування, котрі впливають на щільність транспортних потоків, то надалі транспортний потік будемо трактувати як об'єкт керування. У цьому випадку необхідно формалізувати фізичні та математичні значення факторів керування та пов'язати з ними відповідний стан такого об'єкта керування.

Для простоти обмежимося випадком мережі $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$, яка включає вузли $J \in \mathcal{J}$ лише двох видів: $J \in J^{1,2}$ та $J \in J^{2,1}$. Перший вид вузла ($J \in J^{1,2}$) має одну вхідну дорогу t з кінцем b_t у вузлі та дві вихідні дороги r, s з кінцями a_r, a_s у вузлі, відповідно. Згідно з підходом Coclite, Garavello & Piccoli [6, 8], у такому вузлі матриця розподілу потоку набуває вигляду: $A(J) = [\alpha_m, 1 - \alpha_m]^t$, де $0 \leq \alpha_m \leq 1$. Отже, у такому вузлі дійсний параметр $\alpha_m \in (0, 1)$ можна взяти за фактор керування.

Зауваження 8. Зауважимо, що умова (B) справедлива для кожного вузла $J \in J^{1,2}$. Більше того, ця умова є замкненою відносно збіжності у просторі матриць $A(J) = [\alpha_m, 1 - \alpha_m]^t$ за умови, що $\alpha_m \in [\beta, 1 - \beta]$ $\beta \in (0, 1/2)$ досить мале додатне число.

Другий вид вузлів ($J \in J^{2,1}$) складається з двох вхідних доріг p та q з кінцями b_p і b_q у вузлі та однієї вихідної дороги r з кінцем a_r у вузлі. Для вузлів такого виду існує правило, яке описує у процентному співвідношенні кількість машин, що проїжджають із окремої вхідної дороги через ці вузли мережі. Більше того, умова (Г) виконується для кожного вузла $J \in J^{2,1}$, і тому в таких вузлах транспортний потік уже не є керованим.

Припустимо, що мережа $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ має строго N доріг і $\mathcal{J} = J^{1,2} \cup J^{2,1}$, де множина $J^{1,2}$ містить K вузлів першого виду, а множина $J^{2,1}$ — M вузлів другого виду. Таким чином, маємо мережу з K параметрами керування $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ та M заданими параметрами $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_M)$, $0 < \zeta_l < 1$ $l \in \{1, \dots, M\}$. При цьому, на кожній дорозі $I_i = [a_i, b_i] \in \mathcal{I}$ швидкість $v = v(\rho)$ задовольняє такі вимоги:

$$v(\rho) \text{ — неперервно-спадна функція на відрізьку } [0, \max_{1 \leq i \leq N} \rho_{max,i}] \quad (4.1)$$

$$0 \leq v(\rho_i) \leq v_{i,max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.2)$$

де $v_{i,max} \in L^2(I_i)$ ($1 \leq i \leq N$) відомі функції.

Уведемо наступні позначення:

1. $\mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \mid \beta \leq \alpha_i \leq 1 - \beta, i = 1, \dots, K\} \subset R^K$ — множина параметрів керування, де $\beta \in (0, 1/2)$ досить мале додатне число;
2. $X = R^K \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ — простір допустимих пар (α, ρ) ;
3. $P : R^K \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega)$ ($1 < p < +\infty$) — цільове відображення;
4. $\Lambda = \{g \in L^2(\Omega) : g(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Omega\}$ — упорядкований конус додатних елементів у просторі $L^2(\Omega)$.

Із попереднього параграфа відомо, що для $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \mathcal{A}$ задача

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i) \partial_x \varphi) dx dt = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \forall I_i \in \mathcal{I}, \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\varphi} + \text{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\varphi}) dx dt \geq 0, \\ \forall d \in R, \forall \tilde{\varphi} \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \tilde{\varphi} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\rho_i(0, \cdot) = \bar{\rho}_i \text{ на } I_i \text{ для } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot, a_r^+)) = \alpha_k f_m(\rho_m(\cdot, b_m^-)) \text{ та} \\ f_s(\rho_s(\cdot, a_s^+)) = (1 - \alpha_k) f_m(\rho_m(\cdot, b_m^-)), \\ \text{для } \forall J_k \in J^{1,2} \text{ з однією входною дорогою } m \text{ з кінцем } b_m \\ \text{у вузлі } J_k \text{ та вихідними дорогами } r, s \text{ з кінцями } a_r, a_s \\ \text{у } J_k, \forall k \in \{1, \dots, K\}, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot, a_r^+)) = \zeta_l f_p(\rho_p(\cdot, b_p^-)) + (1 - \zeta_l) f_q(\rho_q(\cdot, b_q^-)) \\ \text{для } \forall J_l \in J^{2,1} \text{ з двома входними дорогами } p, q \text{ з кінцями } b_p, b_q \text{ у } J_l \\ \text{та однією вихідною дорогою } r \text{ з кінцем } a_r \text{ у } J_l, \forall l \in \{1, \dots, M\}, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} L(J, \alpha, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i^+)) \text{ досягає максимального значення при} \\ \text{обмеженнях (4.3)-(4.7) } \forall J \in \mathcal{J}, \text{ де } n = 1, \text{ якщо } J \in J^{1,2}, \\ \text{і } n = 2, \text{ якщо } J \in J^{2,1} \end{cases} \quad (4.8)$$

має єдиний розв'язок:

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^N ([0, T] \times I_i) \rightarrow R^N \text{ у просторі } C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$$

із властивостями (3.11)–(3.12).

Пов'яжемо з задачею (4.3)–(4.8) наступну задачу векторної оптимізації:

$$\text{реалізувати } \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{P(\alpha, \rho)\} \quad (4.9)$$

для всіх $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in R^K$ та $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \in C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ за умов (4.3)–(4.7) та (4.1)–(4.2).

Означення 10. Будемо казати, що задача (4.9) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \dots, f_N)$ з властивостями (3.1) існує пара

$$(\alpha, \rho) \in \mathcal{A} \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)),$$

де $\rho = \rho(\alpha)$ — це відповідний розв'язок задачі (4.3)–(4.8) такий, що ρ задовольняє умови (4.1)–(4.2), і $P(\alpha, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega)$. У цьому випадку пару (α, ρ) будемо називати допустимою.

Позначимо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (4.3)–(4.9). Очевидно, що $\Xi \subset \mathcal{A} \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$. Надалі будемо пов'язувати цю задачу з четвіркою $\langle \Xi, P, \Lambda, \omega \rangle$, де ω є слабкою топологією простору керувань $L^2(\Omega)$.

Зауваження 9. У загальному випадку існує принципова різниця між задачею (4.9) та задачею векторної оптимізації у класичній постановці:

$$\begin{cases} \text{знайти максимум відображення } P(\alpha, \rho) \text{ відносно конуса } \Lambda \\ \text{за умови, що } (\alpha, \rho) \in \Xi \end{cases} \quad (4.10)$$

Справді, нехай пара $(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi$ є ефективним розв'язком задачі (4.9). Тоді $P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \text{Max}_\Lambda(\text{cl}_\omega P(\Xi))$. Звідси

$$P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in P(\Xi) \text{ та } P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \text{Max}_\Lambda P(\Xi).$$

Тому $(\alpha^{eff}, \rho^{eff})$ є розв'язком задачі (4.10). Проте, обернене твердження, у загальному випадку, не є вірним. У той же час, для скалярного випадку завжди має місце таке:

$$\text{якщо } P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) = \max_{(\alpha, \rho) \in \Xi} P(\alpha, \rho), \text{ то}$$

$$(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi \text{ і } P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) = \sup_{(\alpha, \rho) \in \Xi} P(\alpha, \rho).$$

Зауважимо, що задачі векторної оптимізації (4.9) та (4.10) ідентичні у тому випадку, коли $Y = R$ та $\Lambda = R_+$, і приводять до класичної постановки скалярної задачі максимізації з обмеженнями.

Означення 11. Допустиму пару $(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати (Λ, ω) -ефективним розв'язком задачі (4.1)–(4.9), якщо пара $(\alpha^{eff}, \rho^{eff})$ реалізує (Λ, ω) -супремум відображення $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega)$, тобто

$$P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho) = \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} \{P(\alpha, \rho) : \forall (\alpha, \rho) \in \Xi\}.$$

Позначимо через $\text{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω) -ефективних розв'язків векторно-оптимізаційної задачі (4.1)–(4.9), тобто

$$\text{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda) = \left\{ (\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi : P(\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho) \right\}.$$

Тепер дамо наступний результат стосовно топологічних властивостей множини допустимих пар Ξ задачі (4.9). Нехай τ -топологія на

$$Y = R^K \times L^2(0, T; BV(\Omega)),$$

задана як добуток поточної збіжності в R^K та слабкої топології простору $L^2(0, T; BV(\Omega))$. Тоді має місце наступна теорема, доведення якої можна знайти в [2].

Теорема 3. *Нехай $\{(\alpha^k, \rho^k) \in \Xi\}_{k=1}^\infty$ довільна послідовність допустимих пар у задачі (4.3)–(4.8). Тоді знайдеться пара $(\alpha^*, \rho^*) \in Y$ і підпослідовність даної послідовності (для якої збережемо попередні позначення) такі, що*

$$(\alpha^*, \rho^*) \in \Xi, \quad (\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*, \rho^*),$$

тобто множина Ξ є секвенційно компактною відносно τ -збіжності.

Наслідок 1. *Якщо $\alpha \in \mathcal{A}$, то відображення $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$ є неперервним відносно топології поточної збіжності в R^K та слабкої топології простору*

$$L^2(0, T; BV(\Omega)).$$

5. Теорема існування

Нехай $\hat{P} : [R^K \times C(0, T; BV(\Omega))] \rightarrow Y^\bullet$ — деяке розширення відображення $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega)$ на весь простір $R^K \times L^2(0, T; BV(\Omega))$. Тут через $Y^\bullet$ позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 12. Будемо казати, що відображення $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega) \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -напівнеперервним зверху $((\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв.) у точці $(\alpha^0, \rho^0) \in \Xi$, якщо

$$P(\alpha^0, \rho^0) \in \limsup_{(\alpha, \rho) \xrightarrow{\tau} (\alpha^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} \hat{P}(\alpha, \rho).$$

Відображення $P \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на множині Ξ , якщо $P \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на кожній парі з Ξ .

Твердження 1. Припустимо, що простір керування $L^2(\Omega)$ частково впорядкований за конусом додатних елементів Λ . Нехай Ξ непуста підмножина з простору $R^K \times L^2(0, T; BV(\Omega))$ і $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega)$ — задане відображення. Якщо пара $(\alpha^0, \rho^0) \in \Xi$ є довільним (Λ, ω) -ефективним розв'язком задачі (4.9), то тоді відображення $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega) \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на цій парі.

Доведення. Нехай $(\alpha^0, \rho^0) \in \text{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda)$. Тоді $P(\alpha^0, \rho^0) \in \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho)$. З іншого боку, $P(\alpha^0, \rho^0) \in L^{\tau \times \omega}(P, \alpha^0, \rho^0)$, тому $P(\alpha^0, \rho^0) \in L_{\max}^{\tau \times \omega}(P, \alpha^0, \rho^0)$. Звідси, згідно з означенням (6), маємо:

$$P(\alpha^0, \rho^0) \in \limsup_{(\alpha, \rho) \xrightarrow{\tau} (\alpha^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} \hat{P}(\alpha, \rho),$$

що і доводить твердження. $\square$

Зауважимо, що конус додатних елементів Λ у просторі $L^2(\Omega)$ задовольняє так звану властивість Даніеля, яка означає, що кожна зростаюча та обмежена зверху послідовність (тобто, якщо $i \leq j \Rightarrow y_i \leq_\Lambda y_j$) слабо збігається до свого (Λ, ω) -супремума.

Означення 13. Будемо казати, що непуста підмножина $Y_0 \subset L^2(\Omega)$ з упорядкованим конусом Λ є напівобмеженою зверху, якщо кожна зростаюча послідовність $\{y_i\} \subset Y_0$ є обмеженою зверху.

Зауваження 10. Нехай Y_0 — напівобмежена зверху підмножина частково впорядкованого лінійного простору $\langle L^2(\Omega), \Lambda \rangle$. Тоді для довільного елемента $z \in Y_0$ перетин $Y_0^z = (\{z\} + \Lambda) \cap Y_0$ буде обмеженим зверху, тобто існує елемент $z^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $z^* \leq_\Lambda y$ для всіх $y \in Y_0^z$. Отже, напівобмеженість зверху підмножини Y_0 означає напівобмеженість зверху її слабого замикання $\text{cl}_\omega Y_0$. З іншого боку, порівняно зі скалярним випадком, для векторної оптимізаційної задачі (4.9) із секвенційно τ -компактною підмножиною Ξ та $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -напівнеперервним зверху цільовим відображенням $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega)$, множина образів $P(\Xi)$ може бути необмеженою зверху. Це означає, що у загальному випадку не існує елемента $y \in L^2(\Omega)$ такого, що $P(\Xi) \subset \{y^*\} - \Lambda$.

Тепер перейдемо до формулювання та доведення основного результату даної роботи.

Теорема 4. Припустимо, що векторно-оптимізаційна задача (4.9) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. відображення $P : \Xi \rightarrow L^2(\Omega)$. Тоді задача векторної оптимізації (4.9) має непусту підмножину (Λ, ω) -ефективних розв'язків.

Доведення. Крок 1. Покажемо, що множина образів $P(\Xi)$ є напівобмеженою зверху у сенсі означення (13). Припустимо протилежне, а саме: нехай існує послідовність $\{(\alpha^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ така, що відповідна послідовність образів $\{y^k = P(\alpha^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in P(\Xi)$ є зростаючою (тобто $y_k \leq_\Lambda y_{k+1}$ для $\forall k \in \mathbb{N}$) та необмеженою зверху в просторі $L^2(\Omega)$. Тому $\infty_\Lambda \in L^\omega\{y_k\}$, де через $L^\omega\{y_k\}$ позначено множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Згідно з теоремою (3), послідовність $\{(\alpha^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in X_\partial$ є секвенційно τ -компактною. Тому можемо вважати, що $(\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*, \rho^*)$ у $R^K \times L^2(0, T; BV(\Omega))$, де (α^*, ρ^*) — це деяка пара з множини Ξ . Оскільки послідовність $\{P(\alpha^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty$ необмежена зверху, то $\{\infty_\Lambda\} \in L_{\max}^{\tau \times \omega}(P, \alpha^*, \rho^*)$. Тому, згідно з означенням (6), маємо:

$$\limsup_{(\alpha, \rho) \xrightarrow{\tau} (\alpha^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho) = \{\infty_\Lambda\}.$$

З іншого боку, беручи до уваги $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -напівнеперервність зверху відображення P , отримаємо:

$$P(\alpha^*, \rho^*) \in \limsup_{(\alpha, \rho) \xrightarrow{\tau} (\alpha^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho),$$

що суперечить попередньому припущенню. Крок 1 доведено.

Крок 2. Доведемо, що множина $\text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho)$ є непустою. Для цього покажемо, що існує принаймні одна зростаюча послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset P(\Xi)$ така, що $y_k \rightarrow y^*$ і

$$y^* \in \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho) = \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} \{P(\alpha, \rho) : \forall (\alpha, \rho) \in \Xi\}.$$

Нехай y — довільний елемент множини $\text{cl}_\omega P(\Xi)$. Спочатку покажемо, що для довільного околу нуля ν_ω у слабкій топології простору $L^2(\Omega)$ існує елемент $y^\nu \in \text{cl}_\omega P(\Xi)$ такий, що

$$y \leq_\Lambda y^\nu \text{ та } (\{y^\nu\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})) = \emptyset. \quad (5.1)$$

Припустимо протилежне. Нехай існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{cl}_\omega P(\Xi)$ така, що

$$y_1 \in P(\Xi), \quad y_{k+1} \in (\{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y_k\})) \quad \forall k \in N.$$

Оскільки $y_{k+1} \in \{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}$, то ця послідовність є спадною. Беручи до уваги зауваження (10), отримуємо, що множина $\text{cl}_\omega P(\Xi)$ є напівобмеженою зверху. Отже, існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y_k \leq_\Lambda y^*$ для всіх $k \in N$. Тому, згідно з властивістю Данієля, ця послідовність слабо збігається до свого (Λ, ω) -супремума: $y_k \rightharpoonup \tilde{y} \in L^2(\Omega)$. Проте це суперечить умові, що $y_{k+1} \in \text{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})$ $k \in N$. Таким чином, вибір за допомогою правила (5.1) можливий для будь-якого околу ν_ω .

Нехай $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ — система слабких околів нуля у просторі $L^2(\Omega)$ така, що $\nu_{k+1} \subset \nu_k$ для всіх $k \in N$, і для будь-якого слабого околу $\nu(0)$ в $L^2(\Omega)$ існує номер $k^* \in N$ такий, що $\nu_{k^*} \subseteq \nu(0)$. Тоді, використовуючи вибране правило (5.1), можемо побудувати послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{cl}_\omega P(\Xi)$, де u_1 — довільний елемент з множини $P(\Xi)$, таким чином:

$$u_{k-1} \leq_\Lambda u_k \text{ і } (\{u_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_k + \{u_k\})) = \emptyset \quad \forall k \geq 2. \quad (5.2)$$

Тому, з огляду на властивість Данієля, $\{u_k\}_{k=1}^\infty \in \tau$ -збіжною зростаючою послідовністю. Звідси отримуємо, що існує елемент

$$u^* \in \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{u_k \in \text{cl}_\omega P(\Xi) : \forall k \in N\}$$

такий, що $u_k \rightharpoonup u^*$. Очевидно, що $u^* \in \text{cl}_\omega P(\Xi)$. Доведемо, що

$$u^* \in \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{P(\alpha, \rho) : \forall (\alpha, \rho) \in \Xi\}.$$

Припустимо, що існує елемент

$$q \in \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{P(\alpha, \rho) : \forall (\alpha, \rho) \in \Xi\}$$

такий, що $u^* \leq_\Lambda q$. Так як $u_k \leq_\Lambda u^*$ для $\forall k \in N$, то отримуємо, що $u_k \leq_\Lambda q$ для $\forall k \in N$. Тоді умова (5.2) гарантує, що

$$(\{q\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega P(\Xi) \setminus (\nu_k + \{u_k\})) = \emptyset \quad \forall k \in N. \quad (5.3)$$

Отже, з умови (5.3) та з того, що $q \in \text{cl}_\omega P(\Xi)$, випливає: $q \in \nu_k + \{u_k\} \quad \forall k \in N$, тобто $u_k \rightharpoonup q$ у просторі $L^2(\Omega)$. Таким чином, $u^* = q$.

Крок 3. Покажемо, що множина всіх (Λ, ω) -ефективних розв'язків задачі (4.9) $\text{Eff}_\omega(\Xi; P; \Lambda)$ є не пустою. Нехай ξ будь-який елемент з множини $\text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho)$. Тоді, згідно з означенням (5), існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ така, що $y_k \rightharpoonup \xi$ в $L^2(\Omega)$. Задамо послідовність $\{(\alpha^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ як:

$(\alpha^k, \rho^k) = P^{-1}(y_k)$ для всіх $k \in N$. Оскільки множина Ξ є секвенційно τ -компактною (див. 3), то будемо вважати, що існує пара

$$(\alpha^0, \rho^0) \in \Xi : (\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} \text{ в } Y.$$

Тому $\xi \in L^{\tau \times \omega}(P, \alpha^0, \rho^0)$, і отримуємо, що

$$L^{\tau \times \omega}(P, \alpha^0, \rho^0) \cap \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho) \neq \emptyset.$$

Тоді, в силу $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. відображення P на Ξ та означення (6), маємо:

$$P(\alpha^0, \rho^0) \in \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho) = L^{\tau \times \omega}(P, \alpha^0, \rho^0) \cap \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho).$$

Таким чином, з одного боку,

$$P(\alpha^0, \rho^0) \in L^{\tau \times \omega}(P, \alpha^0, \rho^0),$$

звідки випливає рівність

$$P(\alpha^0, \rho^0) = \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

З іншого боку, $\xi \in \text{Sup}_{(\alpha, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} P(\alpha, \rho)$. Отже, $(\alpha^0, \rho^0) \in \text{Eff}_{\omega}(\Xi; P; \Lambda)$. Теорема доведена. $\square$

Бібліографічні посилання

1. Божанова Т. А. Об одной задаче Коши на транспортных сетях // Т. А. Божанова // 36.наук.праць "Питання прикладної математики і математичного моделювання". — ДНУ, 2009. — С. 51–63.
2. Божанова Т. А. О топологических свойствах множества допустимых решений одного класса транспортных сетевых задач // Т. А. Божанова // Вісник ЗНУ, Сер. Фізико-математичні науки, 2009. — №1 — С. 62–75.
3. Bardos C., Leroux A.Y., Nedeles J. C. First-order quasilinear equations with boundary conditions // Communications in Partial Differential Equations, 1979, — N. 4. — P. 1017–1034.
4. Caascone A., D'Apice C., Piccoli B., Rarita L. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007. — Vol. 17, N 10 — P. 1587–1617.
5. Caascone A., D'Apice C., Rarita L. Circulation of car traffic in congested urban areas // Preprint DIIMA— Università degli Studi di Salerno, 2006. — N 22. — P. 1–31.
6. Coclite G. M., Piccoli B. Traffic Flows on a Road Network. — SISSA, Preprint, 2002.
7. Coclite G. M., Garavelo M., Piccoli B. Traffic Flow on Networks // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2005. — Vol. 36. — P. 1862–1886.
8. Garavelo M., Piccoli B. Traffic Flow on Networks // AIMS Series on Appl. Math, 2006. — Vol. 1.
9. Guisti E. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. // Boston : Birkhäuser, 1984.
10. Godlewski E., Raviart P.-A. Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws // Applied Mathematical Sciences. — New York : Springer, 1996. — Vol. 118.

11. *Gugat M., Herty M., Klar A., Leugering G.* Optimal Control for Traffic Flow Networks // Journal of optimization theory and applications, 2005. — Vol. 126. — P. 589–616.
12. *Holden H., Riserbo N. H.* A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1995. — N. 4. — P. 999–1017.
13. *Jahn J.* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
14. *Kruzhkov S.* First-order quasilinear equations in several independent variables // Math. USSR Sbornic, 1970. — N. 10. — P. 217–243.
15. *Lebecque J., Khoshyaran M.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment // In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds, 2002.
16. *Lighthill M. L., Whitham J. B.* On kinetic waves // Proceedings of Royal Society of Edinburg, 1983. — Vol. 229A. — P. 217–243.

Надійшла до редакції 01.09.2009

УДК 517.91

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО
УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Остапенко

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. E-mail: OstapenkoV-34@mail.ru*

Рассмотрена первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на комбинации методов отражений и продолжений, а также на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова. Телеграфное уравнение, краевая задача, ограниченная область.

1. Введение

Основным математическим аппаратом, описывающим распространение волн различной физической природы в средах, обладающих сопротивлением, является телеграфное уравнение. Использование телеграфного уравнения позволяет учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. С целью решения такого рода задач в [1] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение первой краевой задачи [2] в полуограниченной области. В ограниченных областях необходимо возникают дополнительные волны, являющиеся результатом отражения первичных волн от граничной поверхности. В настоящей статье с помощью комбинации интегрального представления решений, метода продолжений и разрабатываемого здесь метода отражений строится решение первой краевой задачи в ограниченной области.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x - x_n < l$, $t > t_n$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t_n) = 0; \quad u_t(x, t_n) = 0, \quad 0 < x - x_n < l \quad (2.2)$$

и краевым условиям первого типа

$$u(x_n, t) = \mu(t - t_n); \quad u(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (2.3)$$

3. Решение задачи

Для решения этой задачи, прежде всего, строится продолжение функции $\mu(t)$ на всю ось t :

$$M(t - t_n) = \begin{cases} \mu(t - t_n), & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Краевое условие (2.3) также продолжается на всю ось t :

$$u(x_n, t) = M(t - t_n). \quad (3.2)$$

На начальном этапе решение задачи отыскивается в виде функции

$$u_0(x, t) = M_0(t - t_n - \frac{x - x_n}{a})e^{\frac{(Da-B)(x-x_n)}{2}} + \\ + ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) + c_1 \frac{x-x_n}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_0(\eta) d\eta \quad (3.3)$$

с неизвестной функцией $M_0(t)$. Здесь $J_0(z)$, $J_1(z)$ - функции Бесселя нулевого и первого порядка,

$$z = \sqrt{c_1[(x - x_n)^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]}; \quad (3.4)$$

$$c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \quad (3.5)$$

Функция (3.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при произвольной функции $M_0(t)$.

Подставив функцию (3.3) в краевое условие (3.2), получим:

$$u_0(x_n, t) = M_0(t - t_n) + a \int_0^{t-t_n} \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_0(\eta) d\eta = M(t - t_n). \quad (3.6)$$

Здесь нужно использовать значение z , получаемое из (3.4) при $x = x_n$, то есть

$$z = a(t - t_n - \eta)\sqrt{-c_1} \quad (3.7)$$

Выполнив в равенстве (3.6) преобразование

$$\tau = t - t_n, \quad (3.8)$$

приведем его к виду

$$M_0(\tau) + a \int_0^\tau \frac{B}{2} J_0(a(\tau - \eta)\sqrt{-c_1}) e^{\frac{Da^2(\tau-\eta)}{2}} M_0(\eta) d\eta = M(\tau). \quad (3.9)$$

Таким образом, оказывается, что если функция $M_0(\tau)$ является решением интегрального уравнения (3.9), то функция (6) удовлетворяет краевому условию (2.3). При этом из (3.1) и (3.9) следует, что функция $M_0(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$M_0(\tau) = 0, \quad \tau < 0, \quad (3.10)$$

Тогда из (3.3) сразу следует, что $u(x, t_n) = 0$, так как в силу условия $x - x_n > 0$ аргумент функции $M_0(\tau)$, а также верхний предел интегрирования в формуле (3.11) становятся отрицательными при $t = t_n$. Это значит, что функция (3.3) удовлетворяет первому начальному условию (2.2). Вычислим производную функции (3.3) по t . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = & M_0'(t - t_n - \frac{x - x_n}{a}) e^{\frac{(Da-B)(x-x_n)}{2}} + \\ & + a \left[\frac{B}{2} + c_1 \frac{x - x_n}{2} \right] M_0(t - t_n - \frac{x - x_n}{a}) e^{\frac{Da(x-x_n)}{2}} + \\ & + a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z) + \right. \\ & \quad \left. + a^2 c_1^2 \frac{(x - x_n)(t - t_n - \eta)}{z^2} \left(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z} \right) \right\} e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_0(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При вычислении функции (3.11) учтено, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z}; \\ \frac{\partial J_0(z)}{\partial z} &= \frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z} J_1(z); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{J_1(z)}{z} \right) &= \frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z^2} \left(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z} \right). \end{aligned}$$

Учтено также, что, как следует из (3.4), $z = 0$ при $\eta = t - t_n - \frac{x - x_n}{a}$ и

$$J_0 = 1; \quad \left. \frac{J_1(z)}{z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

При $t > t_n$ в силу условия $x - x_n > 0$ аргументы функций M_0 и M_0' , а также верхний предел интегрирования в формуле (3.11) становятся отрицательными. А это на основании свойства (3.10) функции M_0 означает, что $u_t(x, t_n) = 0$, то есть функция (3.3) удовлетворяет и второму начальному условию (2.2). Таким образом, функция (3.3) в области $0 < x - x_n < l; 0 > t > t_n$ удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (2.3). С целью проверки выполнения этого условия, с помощью (3.3) и (3.9) вычислим

$$\begin{aligned} u_0(x_n + l, t) = & M_0(t - t_n - \frac{l}{a}) e^{\frac{(Da-B)l}{2}} + \\ & + a e^{-\frac{Bl}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_0(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В формуле (3.12)

$$z = \sqrt{c_1[l^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]}. \quad (3.13)$$

Из формулы (3.12) и свойства (3.10) функции M_0 следует, что функция (3.3) удовлетворяет второму краевому условию (2.3) при $t - t_n < \frac{l}{a}$. При $t - t_n > \frac{l}{a}$ для удовлетворения второму краевому условию (2.3) решение задачи строится в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = & - \left[M_1 \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2l}{a} \right) - \right. \\ & \left. - M_0 \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2l}{a} \right) \right] J_0(z_{p1}) e^{\frac{-(Da+B)(x-x_n)+2Dal}{2}} + \\ & + a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\ & \left. + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [M_1(\eta) + M_0(\eta)] d\eta. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Здесь

$$z = \sqrt{c_1[(x - x_n)^2 - (2l - (x - x_n))^2]}.$$

Функция (3.15) удовлетворяет уравнению (2.1) с произвольными функциями M_0 и M_1 .

Подставляя функцию (3.14) во второе краевое условие (2.3), получим:

$$\begin{aligned} u_0(x_n + l, t) + u_1(x_n + l, t) = & \left[2M_0 \left(t - t_n - \frac{l}{a} \right) - M_1 \left(t - t_n - \frac{l}{a} \right) \right] e^{\frac{(Da-B)l}{2}} + \\ & + a e^{-\frac{Bl}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_1(\eta) d\eta = 0. \quad (3.16) \end{aligned}$$

При подстановке функции (3.15) во второе краевое условие (2.3) учтено, что при $x = x_n + l$ $z_{p1} = 0$ и поэтому $J_0(z_{p1}) = 1$. Выполнив в равенстве (3.16) преобразование,

$$\tau = t - t_n - \frac{l}{a}, \quad (3.17)$$

приведем его к виду

$$M_1(\tau) - a e^{\frac{-Dal}{2}} \int_0^\tau \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(\tau+\frac{l}{a}-\eta)}{2}} M_1(\eta) d\eta = 2M_0(\tau). \quad (3.18)$$

Здесь

$$z = \sqrt{c_1 \left[l^2 - a^2 \left(\tau + \frac{l}{a} - \eta \right)^2 \right]}. \quad (3.19)$$

Из свойства (3.10) функции $M_0(\tau)$ и уравнения (3.18) следует, что функция $M_1(\tau)$ обладает свойством

$$M_1(\tau) \equiv 0, \tau < 0. \quad (3.20)$$

Используя свойства (3.10) и (3.20) функций $M_0(\tau)$ и $M_1(\tau)$, так же, как и для функции $u_0(x, t)$ можно показать, что функция (3.14) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2.2).

Таким образом, в области $0 < x - x_n < l$, $t > t_n$ функция (3.14) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме первого краевого условия (2.3). Учитывая, что функция $u_0(x, t)$ удовлетворяет первому краевому условию (2.3), нужно, чтобы функция $u_1(x, t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_1(x_n, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (3.21)$$

Из формулы (3.15) и свойств (3.10) и (3.20) функций $M_0(\tau)$ и $M_1(\tau)$ следует, что условие (3.21) будет выполнено только при $t - t_n < \frac{2l}{a}$. Для того чтобы удовлетворить этому условию при $t - t_n > \frac{2l}{a}$, решение задачи будем строить в виде суммы трех функций:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t). \quad (3.22)$$

При выборе функции $u_2(x, t)$ мы исходим из следующих соображений. Функция

$$w(x, t) = e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n \pm \frac{x-x_n \mp 2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} K_n(\eta) d\eta \quad (3.23)$$

является решением телеграфного уравнения (2.1) при любых $K_n(\eta)$ и n . Поэтому и производная функции (3.23) по x также будет решением уравнения (2.1). Вычислив эту производную, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = & \pm \frac{1}{a} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{\mp Da(x-x_n \mp 2nl)}{2}} J_0(z_n) K_n \left(t - t_n \pm \frac{x - x_n \mp 2nl}{a} \right) + \\ & + e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \times \\ & \times \int_0^{t-t_n \pm \frac{x-x_n \mp 2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} K_n(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В формуле (3.24) z_{pn} — это значение функции z из (3.4) при $\eta = t - t_n \pm \frac{x - x_n - 2nl}{a}$, то есть

$$\begin{aligned} z_n = & \sqrt{c_1 \left[(x - x_n)^2 - a^2 \left((t - t_n) - (t - t_n \pm \frac{x - x_n \mp 2nl}{a}) \right)^2 \right]} = \\ = & \sqrt{c_1 [(x - x_n)^2 - (\pm(\mp 2nl + (x - x_n)))^2]}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Станем в дальнейшем обозначать величину z_n с верхними знаками через z_{pn} , а с нижними знаками — через z_{mn} . Отметим, что значение величины z_n зависит от того, с каким знаком величина $\frac{x - x_n \pm 2nl}{a}$ входит в аргумент функции и в верхний предел интегрирования в формуле (3.24).

В частности, функция $u_1(x, t)$ получена из формулы (3.24) при $n = 1$. Функция $u_0(x, t)$ также получена из формулы (3.24) при $n = 0$. Функцию

$u_2(x, t)$ в решении (3.22) также строим в форме (3.24):

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = & e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{Da(x-x_n+2l)}{2}} J_0(z_{m1}) \left[M_2 \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2l}{a} \right) - \right. \\ & \left. - \left[M_1 \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2l}{a} \right) - M_0 \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2l}{a} \right) \right] \right] - \\ & - a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\ & \times [M_2(\eta) - [M_1(\eta) - M_0(\eta)]] d\eta \quad (3.26) \end{aligned}$$

с неизвестной функцией $M_2(\tau)$. Функция $u_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при произвольных функциях $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$. Сумма функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ должна удовлетворять краевому условию

$$u_1(x_n, t) + u_2(x_n, t) = 0 \quad t > t_n. \quad (3.27)$$

Подставляя в (3.27) значения функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ из (3.15) и (3.26), получим:

$$\begin{aligned} & - J_0(z_{m1b}) e^{Dal} \left[M_1 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - M_0 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - \right. \\ & \left. - \left[M_2 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - \left[M_1 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - M_0 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) \right] \right] \right] + \\ & + a \int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [M_1(\eta) - M_0(\eta) + \\ & + [M_2(\eta) - (M_1(\eta) - M_0(\eta))]] d\eta = 0. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Здесь из формулы (3.25) получено:

$$z_{m1b} = z_{m1}|_{x=x_n} = 2l\sqrt{-c_1}. \quad (3.29)$$

В формуле (3.28) z имеет значение (3.7).

Таким образом, оказывается, что если функция $M_2(\tau)$ будет удовлетворять получаемому из (3.28) интегральному уравнению

$$\begin{aligned} M_2 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) + \frac{a}{J_0(z_{m1b})} e^{-Dal} \int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_2(\eta) d\eta = \\ = 2 \left[M_1 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - M_0 \left(t - t_n - \frac{2l}{a} \right) \right], \quad (3.30) \end{aligned}$$

то функция (3.22) будет удовлетворять первому краевому условию (2.3) при всех $t > t_n$. После выполнения преобразования

$$\tau = t - t_n - \frac{2l}{a} \quad (3.31)$$

интегральное уравнение (3.30) примет вид

$$M_2(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{m1b})} e^{-Dal} \int_0^\tau \frac{B}{2} J_0 \left(a \left(\tau + \frac{2l}{a} - \eta \right) \sqrt{-c_1} \right) \times \\ \times e^{\frac{Da^2(\tau + \frac{2l}{a} - \eta)}{2}} M_2(\eta) d\eta = 2[M_1(\tau) - M_0(\tau)]. \quad (3.32)$$

Из уравнения (3.41) и свойств (3.14) и (3.30) функций $M_0(\tau)$ и $M_1(\tau)$ следует, что функция $M_2(\tau)$ обладает свойством

$$M_2(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (3.33)$$

Используя свойства (3.10), (3.20) и (3.33) функций $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$, так же, как и для функции $u_0(x, t)$, можно показать, что функция (3.26) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2.2).

Таким образом, в области $0 < x - x_n < l, t > t_n$ функция (3.22) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (2.3). Учитывая, что функция $u_0(x, t) + u_1(x, t)$ удовлетворяет второму краевому условию (2.3), нужно, чтобы функция $u_2(x, t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_2(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (3.34)$$

Подстановка функции $u_2(x, t)$ в левую часть краевого условия (3.34) приводит к равенству

$$u_2(x_n + l, t) = J_0(z_{m1k}) e^{-\frac{B}{2}l} e^{\frac{Da}{2}3l} \sum_{i=0}^2 (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{3l}{a} \right) + \\ + a e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^2 (-1)^i M_i(\eta) d\eta. \quad (3.35)$$

При $t - t_n < \frac{3l}{a}$, ввиду отрицательности аргументов функций M_i и верхних пределов интегрирования, на основании свойств (3.10), (3.20) и (3.33) функций M_i заключаем, что выражение (3.35) будет равно нулю, то есть функция (3.22) будет удовлетворять второму краевому условию (2.3). При $t - t_n > \frac{3l}{a}$ выражение (3.35) будет отлично от нуля и с целью удовлетворения второму краевому условию (2.3) строим решение в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \quad (3.36)$$

где по (3.24) при $n = 2$

$$u_3(x, t) = e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{-Da(x-x_n-4l)}{2}} J_0(z_{p2}) \times \\ \times \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 4l}{a} \right) - \\ - a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-4l}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - \right. \\ \left. - c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} M_i(\eta) d\eta \quad (3.37)$$

с неизвестной функцией $M_3(\tau)$. Функция $u_3(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при произвольных функциях $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$, $M_2(\tau)$ и $M_3(\tau)$. Сумма функций $u_3(x, t)$ и $u_2(x, t)$ должна удовлетворять краевому условию

$$u_3(x_n + l, t) + u_2(x_n + l, t) = 0 \quad t > t_n. \quad (3.38)$$

Заметим, что из формулы (3.25) следует с учетом сделанных выше обозначений, что справедливо равенство:

$$z_{p,n+1,k} = z_{mnk}, \quad (3.39)$$

так как

$$\begin{aligned} z_{pnk} &= z_{pn}|_{x=l+x_n} = l\sqrt{c_1[1 - (2n-1)^2]}; \\ z_{mnk} &= z_{mn}|_{x=l+x_n} = 2l\sqrt{c_1[1 - (2n-1)^2]}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Поэтому, подставляя функции (3.26) и (3.37) в краевое условие (3.38), получим:

$$\begin{aligned} & -J_0(z_{m1b})e^{-\frac{B^2}{t}}e^{\frac{Da}{3}3l} \left[\sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n - \frac{3l}{a} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^2 (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{3l}{a} \right) \right] + ae^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] \times \\ & \times e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \left[\sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} M_i(\eta) + \sum_{i=0}^2 (-1)^i M_i(\eta) \right] d\eta = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Из (3.41) получаем интегральное уравнение для определения функции M_3 :

$$\begin{aligned} & -M_3 \left(t - t_n - \frac{3l}{a} \right) + \frac{a}{J_0(z_{m1b})} e^{\frac{-3Dal}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) \right. \\ & \left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_3(\eta) d\eta = -2 \sum_{i=0}^2 (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{3l}{a} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

В уравнении (3.42)

$$z = \sqrt{c_1[l^2 - a^2((t - t_n) - \eta)^2]}. \quad (3.43)$$

Таким образом, если функция M_3 является решением интегрального уравнения (3.42), функция (3.36) будет удовлетворять второму краевому условию (2.3) при всех t . Выполним в уравнении (3.42) преобразование

$$\tau = t - t_n - \frac{3l}{a}, \quad (3.44)$$

приведем его к виду

$$\begin{aligned} & -M_3(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{m1b})} e^{\frac{-3Dal}{2}} \int_0^\tau \left[\frac{B}{2} J_0(z) \right. \\ & \left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_3(\eta) d\eta = -2 \sum_{i=0}^2 (-1)^i M_i(\tau). \end{aligned} \quad (3.45)$$

где

$$z = \sqrt{c_1 \left[l^2 - a^2 \left(\tau + \frac{3l}{a} - \eta \right)^2 \right]}. \quad (3.46)$$

Из свойств (3.10), (3.20) и (3.33) функций $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$, и $M_2(\tau)$, а также уравнения (3.45) следует, что функция $M_3(\tau)$ обладает свойством

$$M_3(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (3.47)$$

В свою очередь, из этих свойств, так же как и для функции $u_0(x, t)$ следует, что функция (3.36) удовлетворяет начальным условиям (2.2).

Продолжив построение отраженных волн аналогичным способом, мы находим, что решением рассматриваемой краевой задачи будет функция

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_{mn}) \times \right. \\ & \times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) - a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - \right. \\ & \left. \left. - c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^n (-1)^i M_i(\eta) d\eta \right\} - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{-Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) + \right. \\ & + a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\ & \left. \times \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i(\eta) d\eta \right\}, \quad (3.48) \end{aligned}$$

в которой $M_0(\tau)$ является решением интегрального уравнения (3.9), а остальные функции $M_i(\tau)$ являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} M_{2n}(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{mnb})} e^{-Danl} \int_0^{\tau} \frac{B}{2} J_0 \left(a \left(\tau + \frac{2nl}{a} - \eta \right) \sqrt{-c_1} \right) \times \\ \times e^{\frac{Da^2(\tau+\frac{2nl}{a}-\eta)}{2}} M_{2n}(\eta) d\eta = -2 \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i M_i(\tau); \quad (3.49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2n-1}(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{mnk})} e^{-Dal\frac{2n-l}{2}} \int_0^{\tau} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\ \left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(\tau+\frac{(2n-1)l}{a}-\eta)}{2}} M_{2n-1}(\eta) d\eta = 2 \sum_{i=0}^{2(n-1)} (-1)^i M_i(\tau). \quad (3.50) \end{aligned}$$

В уравнениях (3.50) следует z брать при $x = x_n + l$, то есть здесь

$$\begin{aligned} z|_{x=l+x_n} &= \sqrt{c_1[l^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]} = \\ &= \sqrt{c_1 \left[l^2 - a^2 \left(\tau + \frac{(2n-1)l}{a} - \eta \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Параметр τ в уравнениях (3.49) и (3.50) имеет соответственно следующие представления: $\tau = t - t_n - \frac{2nl}{a}$; $\tau = t - t_n - \frac{(2n-1)l}{a}$. При этом все функции $M_n(\tau)$ обладают свойствами

$$M_n(\tau) \equiv 0, \tau < 0, n = 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

В силу этих свойств, при каждом фиксированном $t - t_n = T$ в формуле (3.48) отличным от нуля будет конечное число слагаемых. В самом деле, в суммах в формуле (3.48) каждое из слагаемых при выполнении условий (3.1), (3.52) становится равным нулю, если аргументы функций $M_n(\tau)$ и верхний предел интегрирования будут отрицательными. Для первой суммы в формуле (3.48) условие отрицательности верхнего предела интегрирования при $t - t_n = T$ имеет вид:

$$T - \frac{x - x_n + 2nl}{a} < 0, \quad (3.53)$$

откуда следует:

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{x - x_n}{2l} \quad (3.54)$$

и, поскольку в области отыскания решения $x - x_n < l$, получаем, что при всех n , удовлетворяющих условию

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{l}{2}, \quad (3.55)$$

все слагаемые в первой сумме формулы (3.48) будут равны нулю. Иными словами, суммирование в первой сумме формулы (3.48) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до $N - 1$, где N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (3.55). Аналогично, условие отрицательности верхнего предела интегрирования при $t - t_n = T$ имеет вид:

$$T + \frac{x - x_n - 2nl}{a} < 0, \quad (3.56)$$

откуда следует

$$n > \frac{aT}{2l} + \frac{x - x_n}{2l}. \quad (3.57)$$

Но так как в области интегрирования $x - x_n > 0$, из (3.57) следует, что при

$$n > \frac{aT}{2l} \quad (3.58)$$

все слагаемые во второй сумме формулы (3.48) будут равны нулю. То есть, суммирование во второй сумме формулы (3.48) нужно производить в этом случае до $N1 - 1$; $N1$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее

неравенству (3.58). Все слагаемые в формуле (3.48) являются решениями уравнения (2.1). А так как для каждого фиксированного t число слагаемых в формуле (3.48) конечно, дифференцирование в формуле (3.48) можно выполнять почленно. Поэтому функция (3.48) является решением уравнения (2.1). Из формулы (3.48) непосредственно следует, что при $t - tn = 0$ и $0 < x - x_n < l$ аргументы функций $M_n(\tau)$ и верхние пределы интегрирования всех интегралов становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (3.1) и (3.52) функций $M(\tau)$ и $M_n(\tau)$ получаем из (3.48) $u(x, t_n) = 0$. Таким образом, функция (3.48) удовлетворяет первому начальному условию (2.2). Продифференцируем функцию (3.48) по t . Получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \left\{ e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_{mn}) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M'_i \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) - \right. \\
 & - a \left[\left[-\frac{B}{2} J_0(z_{mn}) - c_1(x - x_n) \frac{J_1(z_{mn})}{z_{mn}} \right] \times \right. \\
 & \times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) \left. \right] + \\
 & + \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] - \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z) - \right. \\
 & - a^2 c_1^2 \frac{(x - x_n)(t - t_n - \eta)}{z^2} \left(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z} \right) \left. \right\} e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i(\eta) d\eta \left. \right\} - \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \times \\
 & \times \left\{ e^{\frac{-Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M'_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) - \right. \\
 & - a \left[\left[-\frac{B}{2} J_0(z_{pn}) - c_1(x - x_n) \frac{J_1(z_{pn})}{z_{pn}} \right] \times \right. \\
 & \times \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) \left. \right] + \\
 & + \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] - \right. \\
 & - \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z) - \\
 & - a^2 c_1^2 \frac{(x - x_n)(t - t_n - \eta)}{z^2} \left(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z} \right) \left. \right\} e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\
 & \times \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i(\eta) d\eta \left. \right\}. \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Из равенства (3.59) непосредственно следует, что при $t - t_n = 0$ и $0 < x - x_n < l$

верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы всех функций $M_i(\tau)$ и $M'_i(\tau)$ в нем становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (3.1) и (3.52) функций $M(\tau)$ и $M_i(\tau)$ получаем из (3.58):

$$u_t(x, t_n) = 0.$$

Таким образом, функция (3.48) удовлетворяет и второму начальному условию (2.2). С целью проверки удовлетворения функцией (3.48) краевым условиям (2.3) вычислим значение этой функции при $x - x = 0$. Учтем, что при таком значении x справедливо равенство

$$z_{mnb} = z_{pnb}.$$

Первое слагаемое в первой сумме формулы (3.48) запишем отдельно, а оставшиеся две суммы объединим в одну. Получим:

$$\begin{aligned} u(x_n, t) = & M_0(t - t_n) - a \int_0^{t-t_n} -\frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_0(\eta) d\eta + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{Danl} J_0(z_{mn}) \left[\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{2nl}{a} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n - \frac{2nl}{a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + a \int_0^{t-t_n-\frac{2nl}{a}} \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_{2n}(\eta) d\eta \right\}. \quad (3.60) \end{aligned}$$

Слагаемое вне знака $\sum$ в формуле (3.60), в соответствии с интегральным уравнением (3.6), равно $M(t - t_n)$. В силу интегральных уравнений (3.49) все слагаемые под знаком $\sum$ обращаются в нуль.

Таким образом, получаем, что

$$u(x - x_n, t) = M_0(t - t_n),$$

то есть, что функция (3.48) удовлетворяет первому краевому условию (2.3). Вычисляя значение функции (3.48) в точке $x = x_n + l$, выполним во второй сумме замену индекса суммирования $n_1 = n - 1$ и объединим слагаемые под общим знаком суммы. Учтя при этом равенство (3.39), получим:

$$\begin{aligned} u(x_n + l, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B}{2}l} \left[e^{\frac{Da(2n+1)l}{2}} J_0(z_{mnk}) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) \right] + a \int_0^{t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\ & \left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \left[\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i(\eta) + \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^{i+1} M_i(\eta) \right] d\eta. \end{aligned}$$

В последней формуле общий член ряда представляется в виде

$$\begin{aligned}
 & - e^{\frac{Da(2n+1)l}{2}} J_0(z_{mnk}) \left[M_{2n+1} \left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) - \right. \\
 & \left. - 2 \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) \right] + a \int_0^{t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\
 & \left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} M_{2n+1}(\eta) d\eta
 \end{aligned}$$

и поэтому на основании интегрального уравнения (3.50) он равен нулю. Таким образом, $u(x_n + l, t) = 0$, то есть функция (3.48) удовлетворяет и второму краевому условию (2.3). Следовательно, показано, что функция (3.48) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является ее решением.

Библиографические ссылки

1. Остапенко В. А. Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 3–17.
2. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полуграниченной области // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 18–20.

Надійшла до редакції 25.10.2009

УДК 519.6

Євдокимов Д. В., Кочубей О. О., Поляков М. В. **Аналіз тенденцій розвитку сучасного математичного та чисельного моделювання** (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 3–17.

Розглянуто деякі останні тенденції розвитку математичного та чисельного моделювання, обумовлені як удосконалюванням математичних моделей та алгоритмів чисельного розв'язку, так і безпрецедентним зростанням потужності електронно-обчислювальної техніки. Показано, що вивчення властивостей чисельних алгоритмів доцільно проводити на спеціальних тестових прикладах, що мають аналітичні розв'язки.

Бібліогр. 15 назв.

УДК 517.9

Капустян О. В., Данілов В. Я. **Про додатні розв'язки рівняння реакції дифузії з правою частиною типу Каратеодорі** (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 18–22.

Для нелінійного рівняння реакції-дифузії з правою частиною типу Каратеодорі, умови на яку не забезпечують єдиність розв'язку задачі Коші, доведено глобальну розв'язність у класі сумовних з квадратом функцій, що набувають невід'ємних значень.

Бібліогр. 4 назв.

УДК 519.6

Когут О. П. **Про стійкість до збурень області одного класу задач оптимального керування** (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 23–41.

Для одного класу задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі означене поняття стійкості відносно збурень області. Запропоновані достатні умови на збурення області, за яких стійкість розглянутої задачі має місце.

Л. 1. Бібліогр. 15 назв.

УДК 519.6

Мусейко О. **Про існування H^1 -розв'язків для деяких задач реєстрації зображень** (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 42–46.

Розглянуто питання існування розв'язків для певного класу нелінійних оптимізаційних задач, які виникають при реєстрації зображень. Необхідною умовою оптимальності (рівняння Ейлера–Лагранжа) для таких задач є нелінійна гранична задача Неймана, яка в загальному випадку може не мати розв'язку. Деякі сильні достатні умови, які, проте, не суперечать предметній області реєстрації зображень, дозволяють отримати позитивну відповідь щодо існування розв'язків.

Л. 1. Бібліогр. 3 назв.

УДК 517.977

Капустян В. О., Лазаренко І. С. **Задачі з мінімальною енергією для параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами** (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 47–60.

Розглядаються задачі з мінімальною енергією для параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами. Самі крайові задачі мають деякі особливості. Зокрема, для них не існує апіорних оцінок. Тому будуються лише класичні їх розв'язки у вигляді рядів по біортогональних базисах Рісса. За критерій якості береться квадрат деякої норми розподіленого керування, яка еквівалентна нормі простору сумовних із квадратом функцій.

Тоді задача розпадається на послідовність скінченновимірних задач із мінімальною енергією. В цьому випадку при додаткових обмеженнях на гладкість вхідних даних отримано повний розв'язок задачі. Якщо ж критерій якості брати у вигляді квадрата норми гільбертового простору сумовних із квадратом функцій, то отримаємо деяку послідовність нескінченновимірних задач із мінімальною енергією з невідомими властивостями щодо гладкості розв'язків. Якщо ж керування залежить лише від часу, то задача зводиться до проблеми моментів для деякого невід'ємно визначеного оператора і еквівалентна аналогічній проблемі для параболічного рівняння з локальними крайовими умовами.

Бібліогр. 7 назв.

УДК 681.31

КОГУТ П. І., МАНЗО Р., НЕЧАЙ І. В. **Топологічні аспекти в задачах векторної оптимізації** (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 61–88.

Досліджуються задачі векторної оптимізації в частково впорядкованих банахових просторах. Вважається, що цільове відображення задовольняє ослабленій властивості напівнеперервності знизу, і при цьому не робиться жодних припущень щодо непустоти внутрішності порядкового конуса. Встановлено достатні умови існування ефективних розв'язків таких задач та визначено роль, яку відіграють топологічні властивості цільового простору. Розглянуто проблему скаляризації означеного класу задач векторної оптимізації. Доведено існування так званих узагальнених ефективних розв'язків. Усі положення ілюстровано численними прикладами.

Л. 9. Бібліогр. 20 назв.

УДК 517.91

ОСТАПЕНКО В. О. **Друга крайова задача для телеграфного рівняння в напівобмеженій області** (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 89–92.

Розглядається друга крайова задача для телеграфного рівняння в напівобмеженій області. Отримано розв'язок цієї задачі в квадратурах. Побудова точного розв'язку задачі ґрунтується на застосуванні методу відображень та методу інтегрального подання розв'язків телеграфного рівняння.

Бібліогр. 2 назв.

УДК 681.31

БАЛАНЕНКО І. Г., КОГУТ П. І. **Про існування слабких оптимальних BV-керувань коефіцієнтами в лінійних еліптичних рівняннях** (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 93–103.

Досліджується задача оптимального керування лінійними виродженими еліптичними рівняннями зі змішаними крайовими умовами. Вважається, що керуванням виступає $BV(\Omega)$ -ваговий коефіцієнт із головної частини еліптичного оператора. Характерною ознакою таких задач є поява ефекту Лаврентьєва та неєдиність слабких розв'язків. Виходячи з прямого методу варіаційного числення, отримано достатні умови існування оптимальних пар у класі слабких (не варіаційних) розв'язків.

Бібліогр. 9 назв.

УДК 519.6

ДОВЖЕНКО А. В. **Напівнеперервна знизу регуляризація відображень, які діють у частково упорядкований за конусом нормований простір** (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 104–115.

Запропонована схема напівнеперервної знизу регуляризації відображень, які діють у простори, частковий порядок у яких задається конусом із пустою топологічною внутрішністю.

Бібліогр. 5 назв.

УДК 517.9

Сясєв А. В., ЩЕРБИНА І. В. **Математичне моделювання процесу деформування кругового циліндра при внутрішньому нарощуванні** (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 116–125.

Розглядається задача про напружено-деформований стан в'язкопружного пустотілого циліндра, який нарощується під дією внутрішнього тиску. Припускається, що процес неперервного нарощування має місце зі сторони внутрішнього радіуса. Розглянуто частинний випадок лінійного закону повзучості, а також наведено результати розрахунків, які показують динаміку напружень та деформацій, що при цьому виникають.

Л. 5. Бібліогр. 5 назв.

УДК 519:876.2

Меньшиков Ю. Л. **Синтез адекватного математичного опису** (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 126–131.

Розглядаються алгоритми побудови математичних описів реальних процесів, які описуються системою звичайних диференціальних рівнянь і які дозволяють отримувати адекватні результати математичного моделювання. Виділяються два основні підходи до проблеми побудови таких описів.

Бібліогр. 7 назв.

УДК 517.9

Божанова Т. А. **Про існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації транспортного потоку на мережі** (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 132–148.

Розглядається гідродинамічна модель для транспортного потоку на мережі. В припущенні, що такий потік є керованим процесом, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Розглянуто випадок, коли цільове відображення діє в лебегів простір і є напівнеперервним зверху на області визначення. Показано, що множина допустимих розв'язків такої задачі є компактною відносно слабкої топології простору $R^K \times L^2(0, T; BV(\Omega))$, та доведено існування ефективних розв'язків розглянутої задачі векторної оптимізації на мережі.

Бібліогр. 16 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. О. **Перша крайова задача для телеграфного рівняння в обмеженій області** (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2009. — Вип. 1. — № 8. — С. 149–161.

Розглядається перша крайова задача для телеграфного рівняння в обмеженій області. Отримано розв'язок цієї задачі в квадратурах. Побудова точного розв'язку задачі ґрунтується на комбінації методів відображень та продовжень та методу інтегрального подання розв'язків телеграфного рівняння.

Бібліогр. 2 назв.

УДК 519.6

Евдокимов Д. В., Кочубей А. А., Поляков Н. В. **Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования** (рос.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 3–17.

Рассмотрены некоторые последние тенденции развития математического и численного моделирования, обусловленные как совершенствованием математических моделей и алгоритмов численного решения, так и беспрецедентным ростом производительности электронно-вычислительной техники. Показано, что изучение свойств численных алгоритмов целесообразно проводить на специальных тестовых примерах, имеющих аналитическое решение.

Библиогр. 15 назв.

УДК 517.9

Капустян А. В., Данилов В. Я. **О положительных решениях уравнения реакции-диффузии с правой частью типа Каратеодори** (укр.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 18–22.

В работе для нелинейного уравнения реакции-диффузии с правой частью типа Каратеодори, условия на которую не гарантируют единственность решения задачи Коши, доказано глобальную разрешимость в классе суммируемых с квадратом функций, принимающих неотрицательные значения.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.6

Когут О. П. **Об устойчивости к возмущениям области одного класса задач оптимального управления** (укр.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 23–41.

Для класса задач оптимального управления коэффициентами нелинейного эллиптического уравнения с краевыми условиями Дирихле предложено понятие устойчивости к возмущениям области. Получены достаточные условия на возмущения области, при которых исходная задача оптимального управления будет устойчивой.

Ил. 1. Библиогр. 15 назв.

УДК 519.6

Мусейко О. **О существовании H^1 -решений для одного класса задач регистрации изображений** (English) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 42–46.

Обсуждается проблема разрешимости одного класса вариационных задач, возникающих при регистрации изображений. Необходимыми условиями оптимальности в таких задачах служит нелинейная краевая задача Неймана. В общем вопрос о ее разрешимости остается открытым на сегодня. Однако касательно задач регистрации изображений удается получить некоторые результаты о разрешимости.

Ил. 1. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977

Капустян В. Е., Лазаренко И. С. **Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями** (рос.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 47–60.

Дано полное решение задачи с минимальной энергией для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и специальным критерием качества. Решения представлены в виде рядов по биортогональному базису Рисса, которые сходятся к непрерывным функциям.

Библиогр. 7 назв.

УДК 681.31

Когут П. И., Манзо Р., Нечай И. В. **Топологические аспекты в задачах векторной оптимизации** (English) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 61–88.

Изучаются задачи векторной оптимизации в частично упорядоченных банаховых пространствах. Предполагается, что целевое отображение обладает ослабленным свойством полунепрерывности снизу, и при этом не требуется непустота внутренности конуса, задающего порядок. Установлены достаточные условия существования эффективных решений таких задач и определена роль топологических свойств целевого пространства. Рассмотрена проблема скаляризации заданного класса задач векторной оптимизации. Доказано существование обобщенных эффективных решений.

Ил. 9. Библиогр. 20 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. А. **Вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области** (рос.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 89–92.

Рассмотрена вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода отражений и на разработанном методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Библиогр. 2 назв.

УДК 681.31

Баланенко И. Г., Когут П. И. **О существовании слабых оптимальных BV-управлений коэффициентами в линейных эллиптических уравнениях** (English) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 93–103.

Изучается задача оптимального управления линейными вырожденными эллиптическими уравнениями со смешанными граничными условиями. Управлением выступает $BV(\Omega)$ -весовой коэффициент в главной части эллиптического оператора. Примечательной чертой таких задач есть наличие эффекта Лаврентьева и неединственность слабых решений. Исходя из прямого метода вариационного исчисления, получены достаточные условия существования оптимальных пар в классе слабых (не вариационных) решений.

Библиогр. 9 назв.

УДК 519.6

Довженко А. В. **Полунепрерывная снизу регуляризация отображений, действующих в частично упорядоченных по конусу нормированных пространствах** (укр.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 104–115.

Исследуется полунепрерывная снизу регуляризация отображений, действующих в нормированных пространствах, частичный порядок в которых задается конусом с пустой топологической внутренностью.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.9

Сясев А. В., Щербина И. В. **Математическое моделирование процесса деформирования кругового цилиндра при внутреннем наращивании** (укр.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 116–125.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии вязкоупругого кругового цилиндра, который наращивается под действием внутреннего давления. Предполагается, что процесс непрерывного наращивания происходит со стороны внутреннего радиуса. Рассмотрен случай линейного закона ползучести, а также приведены результаты

численных расчетов, иллюстрирующих динамику возникающих при этом напряжений и деформаций.

Ил. 5. Библиогр. 5 назв.

УДК 519:876.2

Меньшиков Ю. Л. **Синтез адекватных математических описаний** (рос.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 126–131.

Рассматриваются алгоритмы построения математических описаний реальных процессов, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений и которые позволяют получать адекватные результаты математического моделирования. Выделяются два основных подхода к проблеме построения таких описаний. В рамках одного из этих подходов предложено несколько алгоритмов. Для получения устойчивых результатов используются методы регуляризации А. Н. Тихонова для уравнений с неточно заданным оператором. Предложены новые задачи и алгоритмы построения адекватных математических описаний.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.9

Божанова Т. А. **О существовании эффективных решений задачи векторной оптимизации транспортного потока на сети** (укр.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 132–148.

Рассмотрена модель транспортного потока в векторнозначной постановке. Изучен случай, когда качество управления задается слабо полунепрерывным сверху отображением в целевое нормированное пространство. Установлены достаточные условия существования эффективных управлений транспортной задачей.

Библиогр. 16 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. А. **Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области** (рос.) // Вестник ДНУ. Серия: Моделирование. — ДНУ, 2009. — Вып. 1. — № 8. — С. 149–161.

Рассмотрена первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на комбинации методов отражений и продолжений, а также на разработанном методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Библиогр. 2 назв.

YEVDOKYMOV D. V., KOCHUBEY O. O., POLYAKOV M. V. **Analysis of development tendencies of modern mathematical modeling and numerical simulation** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 3–17(2009).

Some recent development tendencies of mathematical modeling and numerical simulation are considered. They are stimulated as improvement of mathematical models and numerical calculation method, as unprecedented growth of computer technique power. It is shown, that investigation of numerical algorithm properties is expediently to made with using special test examples, which have analytical solutions.

Ref. 15.

KAPUSTYAN O. V., DANILOV V. Y. **On positive solutions of reaction-diffusion equation with Caratheodory nonlinear term.** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 18–22(2009).

In the paper for reaction-diffusion equation with Caratheodory nonlinear term under conditions, which do not guarantee uniqueness of Cauchy problem solution, we prove the global resolvability in the class of nonnegative integrable functions.

Ref. 4.

KOGUT O. P. **On stability of one class of optimal control problems to the domain perturbations** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 23–41(2009).

In this paper we study a classical Dirichlet optimal control problem for a nonlinear elliptic equation with the coefficients which we adopt as controls in $L^\infty(\Omega)$. The problems of this type have no solutions in general, so we make a special assumption on the coefficients of the state equation and introduce the class of so-called solenoidal controls. We study the stability of the above optimal control problem with respect to the domain perturbation. With this aim we introduce the concept of the Mosco-stability for such problems and study the variational properties of Mosco-stable problems with respect to different types of domain perturbations.

Fig. 1. Ref. 15.

MUSEYKO O. **On the existence of H^1 -solutions to certain image registration problems** (English). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 42–46(2009).

The solubility of the class of nonlinear optimization problems arising in image registration is discussed. The necessary optimality conditions (Euler-Lagrange equation) for such kind of problems is a nonlinear Neumann boundary value problem which is not known to have a solution in general. However, in the image registration context some assumptions can be made that let us move a little bit further in this question.

Fig. 1. Ref. 3.

KAPUSTJAN V. YE., LAZARENKO I. S. **Problems with minimal energy for parabolic equations with nonlocal boundary conditions** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 47–60(2009).

The paper deal with the solution of minimal energy optimal control problem for a parabolic equation with non-local boundary condition and a cost functional with special

form. The solution to this problem is presented in the form of the series with respect to the biorthogonal Riesz basis.

Ref. 7.

KOGUT P. I., MANZO R., NECHAY I. V. **Topological aspects in vector optimization problems** (English). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 61–88(2009).

In this paper, we study vector optimization problems in partially ordered Banach spaces. We suppose that an objective mapping possesses a weakened property of lower semicontinuity and make no assumptions on the interior of the ordering cone. We derive the sufficient conditions for existence of efficient solutions of the above problems and discuss the role of the topological properties of the objective space. Our main goal deals with the scalarization of vector optimization problems when the objective functions are vector-valued mappings with a weakened property of lower semicontinuity. We also prove the existence of the so-called generalized efficient solutions via the scalarization process. All principal notions and assertions are illustrated by numerous examples.

Fig. 9. Ref. 20.

OSTAPENKO V. O. **Neumann boundary value problem for the telegraph equation in semi-bounded domains** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 89–92(2009).

The Neumann boundary value problem for the telegraph equation in a semi-bounded domain is considered. Using the method of integral representation and the reflection method, we give the explicit description for the solution of this problem.

Ref. 2.

BALANENKO I. G., KOGUT P. I. **On the existence of weak optimal BV-controls in coefficients for linear elliptic problems** (English). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 93–103(2009).

In this paper we study the optimal control problem associated to a linear degenerate elliptic equation with mixed boundary conditions. We adopt a weight coefficient in the main part of elliptic operator as control in $BV(\Omega)$. Since the equations of this type can exhibit the Lavrentieff phenomenon and non-uniqueness of weak solutions, we show that this optimal control problem is regular. Using the direct method in the Calculus of variations, we discuss the solvability of the above optimal control problems in the class of weak admissible solutions.

Ref. 9.

DOVZHENKO A. V. **Lower semi-continuous regularization of mappings in partially ordered by cone normed spaces** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 104–115(2009).

The scheme of the lower semi-continuous regularization of mappings in normed spaces is proposed. We make no assumptions on the interior of the ordering cone.

Ref. 5.

SJASJEV A. V., STCHERBINA I. V. **Mathematic modelling of circular cylinder deformation under inner growth** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 116–125(2009).

A task on the intensive deformed state(IDS) of a viscoelastic declivous cylinder, which is grown under the action of inner pressure, is considered. The process of continuous increase takes a place on an internal radius so, that a radius and pressure change on set to the given law. The special case of linear law of creeping is considered, and also numeral results are presented as the graphs of temporal dependence of tensions and moving for different points of cylinder.

Fig. 5. Ref. 5.

MENSHIKOV YU. L. **Synthesis of adequate mathematical descriptions** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 126–131(2009).

We study the algorithm for the construction of mathematical descriptions of real processes, which are characterized by the system of ordinary differential equations.

Ref. 7.

BOZHANOVA T. A. **On the existence of efficient solutions to vector optimization problem of traffic flow on network** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 132–148(2009).

We studied traffic flow models in vector-valued optimization statement where the flow is controlled at the nodes of network. We considered the case when an objective mapping possesses a weakened property of upper semicontinuity and made no assumptions on the interior of the ordering cone. The sufficient conditions for the existence of efficient controls of the traffic problems are derived. The existence of efficient solutions of vector optimization problem for traffic flow on network are also proved.

Ref. 16.

OSTAPENKO V. O. **The first initial boundary-value problem for telegraph equation in bounded domain** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 1, No. 8, 149–161(2009).

The first initial boundary-value problem for telegraph equation in bounded domain is considered. The exact solution this problem is obtained. The construction of solution is based on combination prolongation and reflection methods with integral representation vast class telegraph equation solutions which was developed earlier.

Ref. 2.

Зміст

Євдокимов Д. В., Кочубей О. О., Поляков М. В. Аналіз тенденцій розвитку сучасного математичного та чисельного моделювання	3
Капустян О. В., Данілов В. Я. Про додатні розв'язки рівняння реакції дифузії з правою частиною типу Каратеодорі	18
Kogut O. P. On stability of one class of optimal control problems to the domain perturbations	23
Museyko O. On the existence of H^1 -solutions to certain image registration problems	42
Капустян В. Е., Лазаренко И. С. Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями	47
Kogut P. I., Manzo R., Nechay I. V. Topological aspects in vector optimization problems	61
Остапенко В. А. Вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области	89
Balanenko I. G., Kogut P. I. On the existence of weak optimal BV -controls in coefficients for linear elliptic problems	93
Довженко А. В. Напівнеперервна знизу регуляризація відображень, які діють у частково упорядкований за конусом нормований простір	104
Сясєв А. В., Щербина І. В. Математичне моделювання процесу деформування кругового циліндра при внутрішньому нарощуванні	116
Меньшиков Ю. Л. Синтез адекватных математических описаний	126
Божанова Т. А. Про існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації транспортного потоку на мережі	132
Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области	149

Наукове видання

ВІСНИК ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія:

МОДЕЛЮВАННЯ
(проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь)

Заснований у 1993 р.

Випуск 1

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Серія КВ № 7898 від 17.09.2003 р.

Редактор	В. Д. Маловик
Технічний редактор	В. А. Усенко
Коректор	В. Д. Маловик

Підписано до друку 27.10.2009. Формат $70 \times 108^{1/16}$. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. 15,05. Обл.-вид. арк. 15,86. Ум. фарбовідб. 15,4. Тираж 100 прим. Вид. № 1431. Зам. № .

Свідоцтво про держреєстрацію ДК-289 від 21.12.2000 р.

Видавництво ДНУ, 49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72.

Друкарня ДНУ, 49050, м. Дніпропетровськ, вул. Наукова, 5.